

Lecture 02

# 수의 체계

# 진수

- 일상적으로 10진수(**decimal**)를 사용함
  - 0부터 9까지 10개의 기호를 포함함
  - 10는 기수(**radix** 또는 **base**)임
- 2진수(**binary**), 8진수(**octal**), 16진수(**hexadecimal**)
- 16진수(**hexadecimal**)
  - 기호: 0부터 15까지  
 {10, 11, 12, 13, 14, 15}를 {A, B, C, D, E, F}로 표현함
  - 기수: 16
- 예,

|      |        |       |     |        |      |     |        |       |      |       |       |
|------|--------|-------|-----|--------|------|-----|--------|-------|------|-------|-------|
| 10진수 | 9421   | 12    | 2진수 | 1100   | 101  | 8진수 | 752    | 22    | 16진수 | 899   | AB87  |
|      | 847.21 | 0.254 |     | 11.001 | 1.01 |     | 145.23 | 744.2 |      | 7E.FD | 1.2BB |

# 진수

- 10진수의 자세한 해석

$$25,426.365 = 20,000 + 5,000 + 400 + 20 + 6 + 0.300 + 0.060 + 0.005$$

$$= 2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

- 일반적인 **b**진법

- 기호: 0부터  $(b - 1)$ 까지
- 기수:  $b$
- 임의적인  $A$ 의 수를 10진수 값으로 변환하는 공식

|       |       |       |       |       |       |          |          |          |          |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| 5     | 4     | 3     | 2     | 1     | 0     | -1       | -2       | -3       | -4       |
| $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | $a_{-1}$ | $a_{-2}$ | $a_{-3}$ | $a_{-4}$ |

$$A = a_5 \times b^5 + a_4 \times b^4 + a_3 \times b^3 + a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

$$+ a_{-1} \times b^{-1} + a_{-2} \times b^{-2} + a_{-3} \times b^{-3} + a_{-4} \times b^{-4}$$

# 진수



- 예,
  - 2진수 110101.100 → 10진수 값?
  - 8진수 7145.02 → 10진수 값?
  - 16진수 8FE2.B2 → 10진수 값?

$$\begin{aligned}110101.100 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} \\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0 \\ &= 53.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7145.02 &= 7 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0 + 0 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2} \\ &= 3,584 + 64 + 32 + 5 + 0 + 0.03125 \\ &= 3,685.03125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8FE2.B2 &= 8 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 2 \times 16^0 + 11 \times 16^{-1} + 2 \times 16^{-2} \\ &= 32,768 + 3,840 + 224 + 2 + 0.6875 + 0.0078125 \\ &= 36,834.6953125\end{aligned}$$

# 진수



| 10진수 | 2진수  | 8진수 | 16진수 |
|------|------|-----|------|
| 0    | 0000 | 0   | 0    |
| 1    | 0001 | 1   | 1    |
| 2    | 0010 | 2   | 2    |
| 3    | 0011 | 3   | 3    |
| 4    | 0100 | 4   | 4    |
| 5    | 0101 | 5   | 5    |
| 6    | 0110 | 6   | 6    |
| 7    | 0111 | 7   | 7    |
| 8    | 1000 | 10  | 8    |
| 9    | 1001 | 11  | 9    |
| 10   | 1010 | 12  | A    |
| 11   | 1011 | 13  | B    |
| 12   | 1100 | 14  | C    |
| 13   | 1101 | 15  | D    |
| 14   | 1110 | 16  | E    |
| 15   | 1111 | 17  | F    |

# 진법 변환

## 10진수 - 2진수 변환

75.6875

| 2      | 나머지 | 2진수     | 정수 | 소수   |
|--------|-----|---------|----|------|
| 2   75 |     |         |    |      |
| 2   37 | 1   | 1       | 0. | 6875 |
| 2   18 | 1   | 11      | ×  | 2    |
| 2   9  | 0   | 011     | 1. | 3750 |
| 2   4  | 1   | 1011    | ×  | 2    |
| 2   2  | 0   | 01011   | 0. | 7500 |
| 2   1  | 0   | 001011  | ×  | 2    |
| 0      | 1   | 1001011 | 1. | 5000 |
|        |     |         | ×  | 2    |
|        |     |         | 1. | 0    |

|   |  |
|---|--|
|  |  |
| <b>1001011.1011</b>   | 0.1011   |

# 진법 변환

## 10진수 - 2진수 변환

75.6

| 2 | 75 | 나머지 | 2진수     | 2진수   | 정수  | 소수   |
|---|----|-----|---------|-------|-----|------|
| 2 | 37 | 1   | 1       |       | 0.  | 6    |
| 2 | 18 | 1   | 11      |       | × 2 |      |
| 2 | 9  | 0   | 011     | 0.1   |     | 1. 2 |
| 2 | 4  | 1   | 1011    |       | × 2 |      |
| 2 | 2  | 0   | 01011   | 0.10  |     | 0. 4 |
| 2 | 1  | 0   | 001011  |       | × 2 |      |
|   | 0  | 1   | 1001011 | 0.100 |     | 0. 8 |
|   |    |     |         |       |     | × 2  |
|   |    |     |         |       |     | 1. 6 |

|                            |   |        |
|----------------------------|---|--------|
| <b>1001011.10011001...</b> | ← | 0.1001 |
|----------------------------|---|--------|

# 진법 변환

## 10진수 - 8진수 변환

75.6875

|   |           |          |               |      |    |             |
|---|-----------|----------|---------------|------|----|-------------|
| 8 | <b>75</b> | 나머지      | 8진수           | 8진수  | 정수 | 소수          |
| 8 | 9         | <b>3</b> | <b>3</b>      |      | 0. | <b>6875</b> |
| 8 | 1         | <b>1</b> | <b>13</b>     |      | ×  | <b>8</b>    |
|   | 0         | <b>1</b> | <b>113</b>    | 0.5  | 5. | <b>5000</b> |
|   |           |          | <b>113.54</b> | 0.54 | ×  | <b>8</b>    |
|   |           |          |               |      | 4. | <b>0</b>    |

# 진법 변환

## 10진수 - 8진수 변환

75.6

| 8 | 75 | 나머지 | 8진수 |
|---|----|-----|-----|
| 8 | 9  | 3   | 3   |
| 8 | 1  | 1   | 13  |
|   | 0  | 1   | 113 |

| 8진수   | 정수 | 소수 |
|-------|----|----|
|       | 0. | 6  |
|       | ×  | 8  |
| 0.4   | 4. | 8  |
|       | ×  | 8  |
| 0.46  | 6. | 4  |
|       | ×  | 8  |
| 0.463 | 3. | 2  |
|       | ×  | 8  |
|       | 1. | 6  |

113.46314631...

0.4631

# 진법 변환

## 10진수 - 16진수 변환

75.6875

|    |    |     |      |      |       |      |
|----|----|-----|------|------|-------|------|
| 16 | 75 | 나머지 | 16진수 | 16진수 | 정수    | 소수   |
| 16 | 4  | 11  | B    |      | 0.    | 6875 |
|    | 0  | 4   | 4B   |      | ×     | 16   |
|    |    |     |      |      | 11. 0 |      |

4B

↓

**4B.B**

0.B

←

# 진법 변환

## 10진수 - 16진수 변환

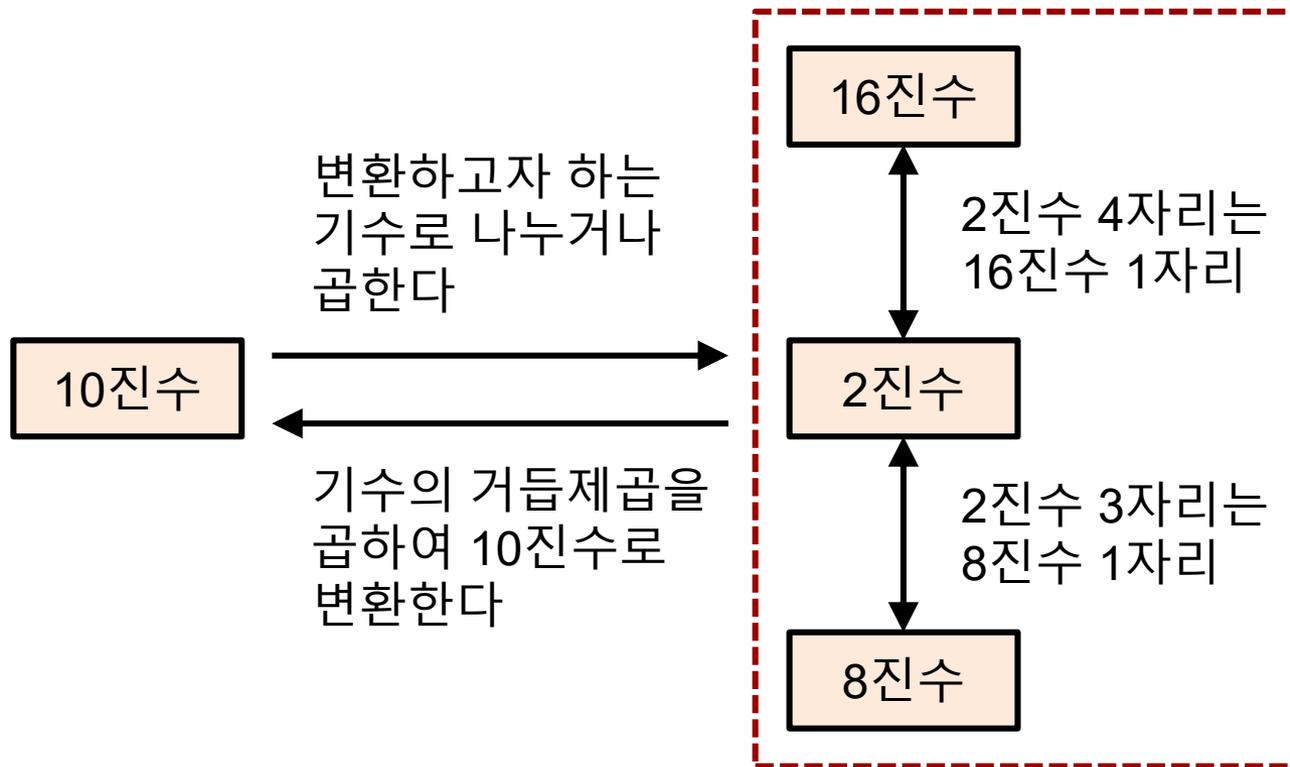
75.6

|    |           |           |           |      |      |          |
|----|-----------|-----------|-----------|------|------|----------|
| 16 | <b>75</b> | 나머지       | 16진수      | 16진수 | 정수   | 소수       |
| 16 | 4         | <b>11</b> | <b>B</b>  |      | 0.   | <b>6</b> |
|    | 0         | <b>4</b>  | <b>4B</b> |      | × 16 |          |
|    |           |           |           | 0.9  |      |          |
|    |           |           |           |      | 9.   | 6        |
|    |           |           |           |      | × 16 |          |
|    |           |           |           | 0.99 | 9.   | 6        |

4B → 4B.99...
0.99 → 4B.99...

# 진법 변환

- 2진수 - 8진수 - 16진수 - 10진수 상호 변환



# 진법 변환

## ■ 2진수 - 8진수 - 16진수 - 10진수 상호 변환

$$\begin{aligned} 110101.100_{(2)} &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} \\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0 \\ &= 53.5_{(10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 110101.100_{(2)} &= 110 \ 101. \ 100 \\ &= \ 6 \ 5. \ 4 \\ &= 64.4_{(8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 110101.100_{(2)} &= 0011 \ 0101. \ 1000 \\ &= \ 3 \ 5. \ 8 \\ &= 35.8_{(16)} \end{aligned}$$

# 2진수 정수 연산과 보수

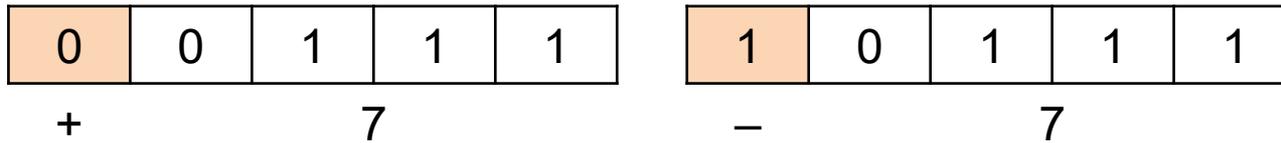
## 2진수 양의 정수 덧셈

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 + 0 \\
 \hline
 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0 \\
 + 1 \\
 \hline
 01
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 + 0 \\
 \hline
 01
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 + 1 \\
 \hline
 10
 \end{array}$$

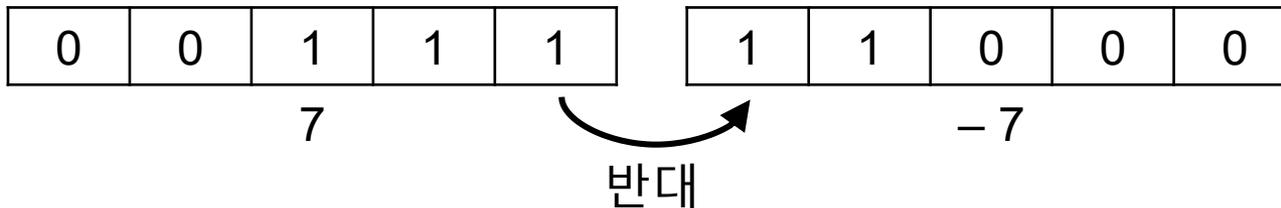
|         | 10진수         |                   | 2진수               |  | 8진수          |  | 16진수      |
|---------|--------------|-------------------|-------------------|--|--------------|--|-----------|
| 캐리 →    | <b>11</b>    |                   | <b>0110000</b>    |  | <b>10</b>    |  | <b>0</b>  |
| (carry) | 49 =         |                   | 00110001 =        |  | 61 =         |  | 31        |
|         | + 58 =       | + 00111010 =      | + 00111010 =      |  | + 72 =       |  | + 3A      |
|         | <u>107 =</u> | <u>01101011 =</u> | <u>01101011 =</u> |  | <u>153 =</u> |  | <u>6B</u> |

# 2진수 정수 연산과 보수

- 2진수 음의 정수 표현과 보수
  - 부호와 절대치



- 1의 보수



# 2진수 정수 연산과 보수

- 2진수 음의 정수 표현과 보수
  - 2의 보수

|       |   |   |    |   |   |  |
|-------|---|---|----|---|---|--|
| 7     | 0 | 0 | 1  | 1 | 1 |  |
| 1의 보수 | 1 | 1 | 0  | 0 | 0 |  |
|       | + |   |    |   | 1 |  |
| 2의 보수 | 1 | 1 | 0  | 0 | 1 |  |
|       |   |   | -7 |   |   |  |

|       |   |   |   |   |   |  |
|-------|---|---|---|---|---|--|
| -7    | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1의 보수 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
|       | + |   |   |   | 1 |  |
| 2의 보수 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |
|       |   |   | 7 |   |   |  |

# 2진수 정수 연산과 보수

- 2진수 음의 정수 표현과 보수
  - 비교

| 2진수       | 부호와 절대치 | 1의 보수 | 2의 보수 |
|-----------|---------|-------|-------|
| 0000 0000 | +0      | +0    | +0    |
| 0000 0001 | +1      | +1    | +1    |
| ...       | ...     | ...   | ...   |
| 0111 1111 | +127    | +127  | +127  |
| 1000 0000 | -0      | -127  | -128  |
| ...       | ...     | ...   | ...   |
| 1111 1110 | -126    | -1    | -2    |
| 1111 1111 | -127    | -0    | -1    |

# 2진수 정수 연산과 보수

- 2진수 음의 정수 표현과 보수
  - 비교

|              |         | 정수의 표현 범위                            |
|--------------|---------|--------------------------------------|
| 비트 크기<br>N비트 | 부호와 절대치 | $-(2^{N-1} - 1) \sim +(2^{N-1} - 1)$ |
|              | 1의 보수   |                                      |
|              | 2의 보수   | $-2^{N-1} \sim +(2^{N-1} - 1)$       |

# 2진수 정수 연산과 보수

## 부호 확장

| 2진수 표현 방식 | 부호 확장 방법                      | 구분       | 8비트               | 16비트 확장           |
|-----------|-------------------------------|----------|-------------------|-------------------|
| 부호와 절대치   | 부호만 MSB에 복사하고,<br>나머지는 0으로 채움 | 양수       | 00101010          | 00000000 00101010 |
|           |                               | 음수       | 10010111          | 10000000 10010111 |
| 1의 보수     | 늘어난 길이만큼 부호와<br>같은 값으로 모두 채움  | 양수       | 00101010          | 00000000 00101010 |
|           |                               | 음수       | 10010111          | 11111111 10010111 |
| 양수        |                               | 00101010 | 00000000 00101010 |                   |
| 음수        |                               | 10010111 | 11111111 10010111 |                   |
| 2의 보수     |                               |          |                   |                   |

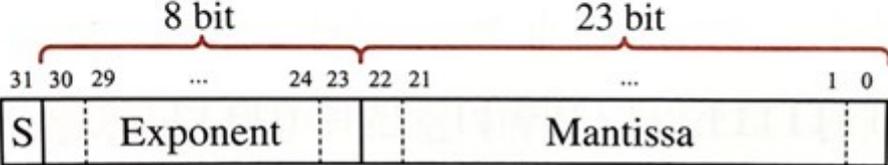
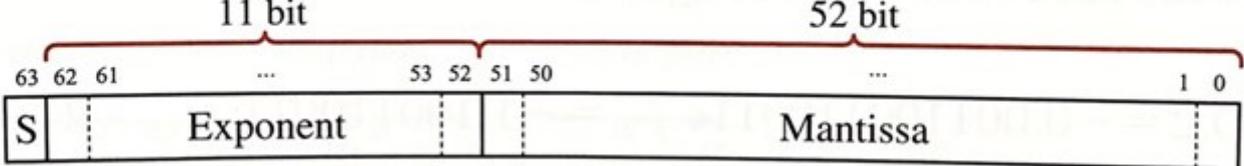
# 2진수 정수 연산과 보수

- 2의 보수 연산
  - 2진수의 연산과 같음
  - 오버플로(**overflow**) 발생할 수 있음  
예, 8비트 연산

| 10진수  |    | 2진수              | 10진수  |    | 2진수              |
|-------|----|------------------|-------|----|------------------|
|       | 캐리 | <b>0</b> 1000010 |       | 캐리 | <b>1</b> 0111110 |
| 98    | =  | 01100010         | - 98  | =  | 01100010         |
| + 74  | =  | + 01001010       | - 74  | =  | - 01001010       |
| <hr/> |    | <hr/>            | <hr/> |    | <hr/>            |
| - 84  | =  | 10101100         |       |    | 10011110         |
|       |    |                  |       |    | + 10110110       |
|       |    |                  | + 84  | =  | <hr/>            |
|       |    |                  |       |    | 01010100         |

# 2진 부동소수점 수의 표현

- 단정도 및 배정도 부동소수점 수
  - S - 부호
  - Exponent - 지수
  - Mantissa - 가수

| 구분             | IEEE 754 표준 부동소수점 수의 비트 할당   | 바이어스  |
|----------------|--|-------|
| 단정도<br>부동소수점 수 |    | 127   |
| 배정도<br>부동소수점 수 |  | 1,023 |

# 2진 부동소수점 수의 표현

- 정규화

$$50 = 50.0 \times 10^0 = 5.0 \times 10^1 = 0.5 \times 10^2$$

- 예,

$$75.6878 = 1001011.1011_{(2)} = 1.0010111011_{(2)} \times 2^6 = 1.0010111011_{(2)} \times 2^{110_{(2)}}$$

| 부호 | 지수(바이어스 127)           | 가수                       |
|----|------------------------|--------------------------|
| 양수 | 01111111(127) + 110(6) | 1.을 생략한 가수               |
| 0  | 10000101               | 001011101100000000000000 |

# 2진 부동소수점 수의 표현

▪ 예,

$$-0.2 = -0.001100110011\dots_{(2)} = 1.100110011\dots_{(2)} \times 2^{-3} = 1.100110011\dots_{(2)} \times 2^{-11}_{(2)}$$

| 부호 | 지수(바이어스 127)          | 가수                      |
|----|-----------------------|-------------------------|
| 음수 | 01111111(127) - 11(3) | 1.을 생략한 가수              |
| 1  | 01111100              | 10011001100110011001100 |