Lecture 04

불 대수

기본 논리식 표현

- 불 대수란?
  - AND, OR, NOT을 이용하여 표현함
- 표현법
  - 각각의 입력과 출력에 해당하는 기호는 보통 알파벳 대문자 또는 소문자로 나타냄
  - AND : 곱셈
  - OR : 덧셈
  - NOT : $\bar{A}$ 또는 A'

입력	출력
A	***F***
0	$\bar{A}$
1	A

입력		출력
A	***B***	***F***
0	0	$\bar{A}\bar{B}$
0	1	$\bar{A}B$
1	0	$A\bar{B}$
1	1	AB

입력			출력
A	***B***	***C***	***F***
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	$AB\bar{C}$
1	1	1	ABC

기본 논리식 표현

- 출력 함수를 구성할 때 여러 가지 논리식이 있을 수 있음

입력		출력
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$F = \bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$$

- 주어진 논리식으로부터 진리표를 만들 수 있음
  - 예, $F = A + \bar{B}C$

입력			출력
A	B	C	$A + \bar{B}C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

불 대수 법칙

▪ 불 대수 공리

P1	$A = 0$ or $A = 1$	P3	$1 \cdot 1 = 1$	P5	$1 + 1 = 1$	P7	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$
P2	$0 \cdot 0 = 0$	P4	$0 + 0 = 0$	P6	$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1$		

▪ 불 대수의 기본 법칙

- 항등•누승•보간•이중 부정 법칙

1	$A + 0 = 0 + A = A$	2	$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$		
3	$A + 1 = 1 + A = A$	4	$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$		
5	$A + A = A$	6	$A \cdot A = A$		
7	$A + \bar{A} = 1$	8	$A \cdot \bar{A} = 0$	9	$\bar{\bar{A}} = A$

쌍대성(duality) : 불 대수 공리나 기본 법칙에서 좌우 한 쌍에서 0과 1을 서로 바꾸고 ·과 +도 서로 바꾸며 다른 한쪽이 얻어진 성질임

불 대수 법칙

- 불 대수의 기본 법칙
  - 교환 법칙(communicative law)

10	$A + B = B + A$	11	$A \cdot B = B \cdot A$

  - 결합 법칙(associate law)

12	$(A + B) + C = A + (B + C)$	13	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

  - 분배 법칙(distributive law)

14	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	15	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

  - 드모르간의 정리(De Morgan's theorem)

16	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	17	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

불 대수 법칙

- 불 대수의 기본 법칙
  - 흡수 법칙(absorptive law)

18	$A + A \cdot B = A$	19	$A \cdot (A + B) = A$

  - 합의 정리(consensus theorem)

20	$AB + BC + \bar{A}C = AB + \bar{A}C$	21	$(A + B)(B + C)(\bar{A} + C) = (A + B)(\bar{A} + C)$

  - 드모르간 정리의 일반식

3항 드모르간 정리	$\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ $\overline{A \cdot B \cdot C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
4항 드모르간 정리	$\overline{A + B + C + D} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$ $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$
일반식	$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$ $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$

불 대수 법칙

- 불 대수의 기본 법칙 증명
  - 전리표를 사용하거나 다른 기본 법칙을 사용하여 증명할 수 있음
  - 예, 분배 법칙(15) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ 증명

진리표 사용

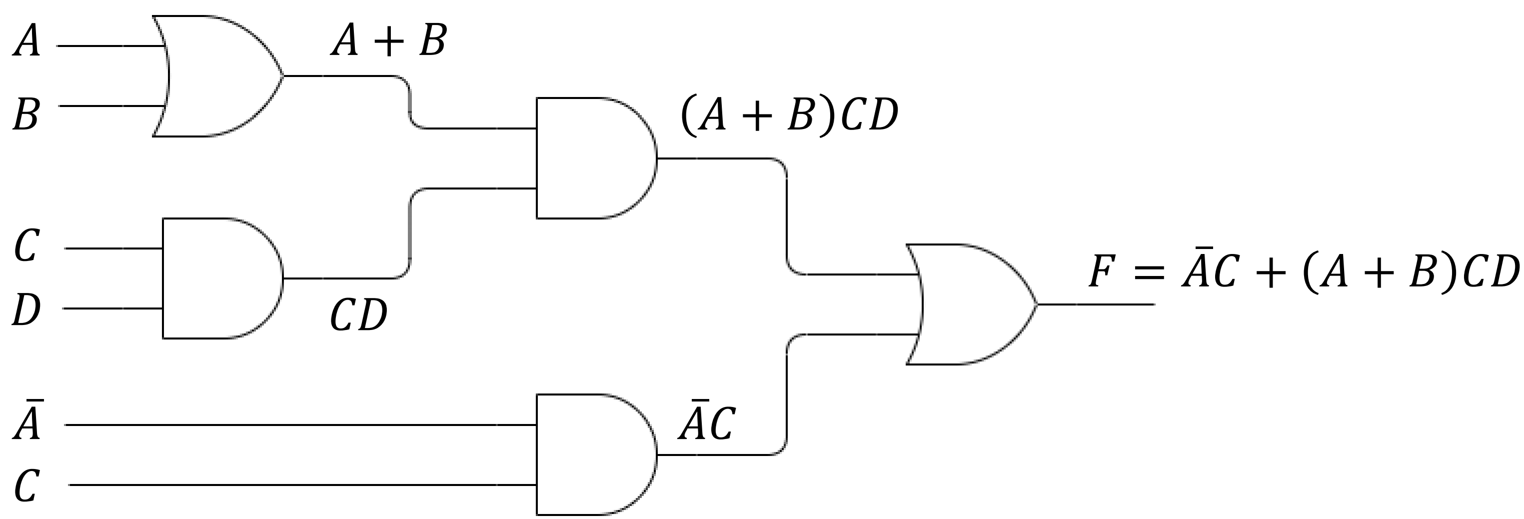
입력			왼쪽	오른쪽		
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A+BC}$	$\boldsymbol{A+B}$	$\boldsymbol{A+C}$	$\boldsymbol{(A+B)(A+C)}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

3번 법칙 사용

$$
\begin{aligned}
(A + B) \cdot (A + C) &= AA + AC + BA + BC \\
&= A + AC + AB + BC \\
&= A \cdot (1 + B + C) + BC \\
&= A \cdot 1 + BC \\
&= A + BC
\end{aligned}
$$

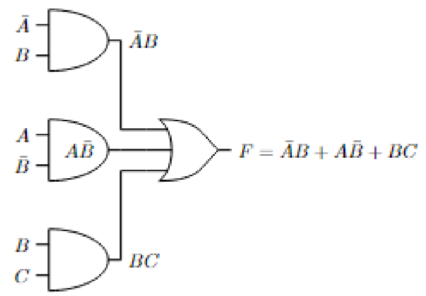
논리회로의 논리식 변환

- 논리회로를 설계하거나 분석하기 위해 논리식으로 표현함
  - 예,
    - 입력 : A, B, C, D
    - 출력 : F

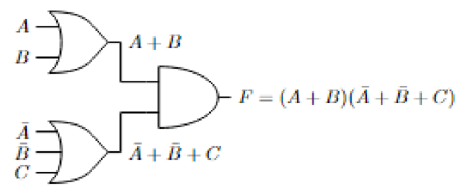


논리식의 회로 구성

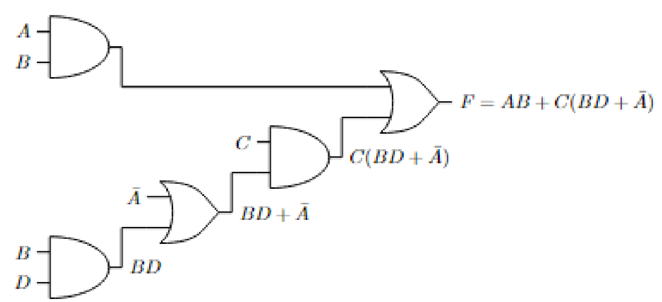
- AND-OR 회로
  - 예, $F = \bar{A}B + A\bar{B} + BC$



- OR-AND 회로
  - 예, $F = (A + B)(\bar{A} + \bar{B} + C)$



- 복합 회로
  - 예, $F = AB + C(BD + \bar{A})$



불 대수식의 표현 형태

- 불 대수식을 표현하는 2가지 기본 형태가 있음
  - 곱의 합(SOP: Sum Of Product) : AND-OR 결합 형태
  - 합의 곱(POS: Product Of Sum) : OR-AND 결합 형태
- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
  - 입력 측인 1단계가 AND 항(곱의 항)으로 구성되고, 출력 측인 2단계는 OR 항(합의 항)으로 만들어진 논리식임
  - 예,

$$F = A$$

$$F = A + \bar{B} + C$$

$$F = A\bar{B}$$

$$F = AB + \bar{C}$$

$$F = AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D + ABCD$$

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
  - 표준 곱의 항 : 모든 입력을 포함하는 항임
  - 표준 곱의 항 : 최소항이라고 함
    - 예, A, B, C, D 4개의 입력을 포함하는 경우

    $AB\bar{C}\bar{D}$, $\bar{A}BCD$, $ABCD$ 등 → 표준 곱의 항 또는 최소항

    ABC, $AB\bar{C}$, $B\bar{C}$ 등 → 최소항 아님

  - 최소 SOP : SOP로 나타낸 함수 중에서 최소 곱의 항들로 나타낸 것임
    - 예, 아래 식들은 모두 같은 결과를 만들어내는 논리식임

1	$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$
2	$\bar{A}B + A\bar{B} + ABC$
3	$\bar{A}B + A\bar{B} + AC$
4	$\bar{A}B + A\bar{B} + BC$

최소 SOP

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
  - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$A = 0$ AND $B = 1$ OR
$A = 1$ AND $B = 0$ OR
$A = 1$ AND $B = 1$일 때 $F = 1$임

입력		출력
A	***B***	***F***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\bar{A} = 1$ AND $B = 1$ OR
$A = 1$ AND $\bar{B} = 1$ OR
$A = 1$ AND $B = 1$일 때 $F = 1$임

$\bar{A}B = 1$ OR $A\bar{B} = 1$ OR $AB = 1$일 때 $F = 1$임

$F = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
  - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{A}B + A\bar{B} + AB \\
&= m_1 + m_2 + m_3 \\
&= \sum m(1,2,3)
\end{aligned}
$$

입력		출력	최소항	기호
A	***B***	***F***		
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}B$	m_1
1	0	1	$A\bar{B}$	m_2
1	1	1	AB	m_3

$$F = \sum m(0,1,3,5,7)$$

입력			출력	최소항	기호
A	***B***	***C***	***F***		
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	1	ABC	m_7

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
  - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$$F = \sum m(0,1,3,5,7)$$

$$\bar{F} = \sum m(2,4,6)$$

입력			출력	최소항	기호
A	***B***	***C***	***F***		
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	1	ABC	m_7

불 대수식의 표현 형태

- 합의 곱(POS)과 최대항(maxterm)
  - 입력 측인 1단계는 OR 항(합의 항)으로 구성되고, 출력 측인 2단계는 AND 항(곱의 항)으로 만들어진 논리식임
  - 예,

$$F = A$$

$$F = A + \bar{B} + C$$

$$F = A(B + C)$$

$$F = (A + B)(\bar{A} + C)$$

$$F = (A + B + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(A + B + C + D)$$

  - 표준 합의 항 : 모두 입력을 포함하는 항임
  - 표준 합의 항 : 최대항이라고 함
    - 예, A, B, C, D 4개의 입력을 포함하는 경우

    $A + B + C + D$는 최대항임, $A + B + C$는 최대항 아님

불 대수식의 표현 형태

- 합의 곱(POS)과 최대항(maxterm)
  - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

SOP

$$F = \bar{A}B + AB$$
$$F = m_1 + m_3$$
$$F = \sum m(1,3)$$

입력		출력	최소항
A	***B***	***F***	
0	0	0	$m_0 = \bar{A}\bar{B}$
0	1	1	$m_1 = \bar{A}B$
1	0	0	$m_2 = A\bar{B}$
1	1	1	$m_3 = AB$

POS

$$F = (A + B)(\bar{A} + B)$$
$$F = M_0 + M_2$$
$$F = \prod M(0,2)$$

입력		출력	최대항
A	***B***	***F***	
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \bar{B}$
1	0	0	$M_2 = \bar{A} + B$
1	1	1	$M_3 = \bar{A} + \bar{B}$

불 대수식의 표현 형태

- 최소항과 최대항의 관계

입력			출력		최소항	기호	최대항	기호	관계
A	**B**	**C**	**F**	**F'**					
0	0	0	1	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0	$M_0=\overline{m_0}$
0	0	1	1	0	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1	$A+B+\bar{C}$	M_1	$M_1=\overline{m_1}$
0	1	0	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2	$A+\bar{B}+C$	M_2	$M_2=\overline{m_2}$
0	1	1	1	0	$\bar{A}BC$	m_3	$A+\bar{B}+\bar{C}$	M_3	$M_3=\overline{m_3}$
1	0	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4	$\bar{A}+B+C$	M_4	$M_4=\overline{m_4}$
1	0	1	1	0	$A\bar{B}C$	m_5	$\bar{A}+B+\bar{C}$	M_5	$M_5=\overline{m_5}$
1	1	0	0	1	$AB\bar{C}$	m_6	$\bar{A}+\bar{B}+C$	M_6	$M_6=\overline{m_6}$
1	1	1	1	0	ABC	m_7	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	M_7	$M_7=\overline{m_7}$

불 대수식의 표현 형태

- 최소항과 최대항의 관계

$$
\begin{aligned}
F &= \sum m(0,1,3,5,7) \\
&= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC \\
&= \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC}} \\
&= \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{\bar{A}BC} \cdot \overline{A\bar{B}C} \cdot \overline{ABC}} \\
&= \overline{(A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})} \\
&= \overline{\prod M(0,1,3,5,7)}
\end{aligned}
$$

$$F = \sum m(0,1,3,5,7) = \overline{\sum m(2,4,6)} = \overline{\overline{\prod M(2,4,6)}} = \prod M(2,4,6)$$

논리식의 간소화

- 불 대수 법칙을 이용해서 논리식을 간소화할 수 있음
  - 예,

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC \\
&= (\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC) + (A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C) + ABC \\
&= \bar{A}B(\bar{C} + C) + A\bar{B}(\bar{C} + C) + ABC \\
&= \bar{A}B \cdot 1 + A\bar{B} \cdot 1 + ABC \\
&= \bar{A}B + A\bar{B} + ABC
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= A + \bar{A}B \\
&= (A + \bar{A})(A + B) \\
&= 1 \cdot (A + B) \\
&= A + B
\end{aligned}
$$