Lecture 05

논리식의 간소화

카르노 맵(Karnaugh map)

- 카르노 맵 : 복잡한 논리회로를 간소화된 등가 회로로 만드는 체계적인 축소를 수행하는 도구로, 불 출력 레벨을 2차원으로 나타낸 표임
- 2변수 카르노 맵은 아래와 같이 3가지 형태로 나타낼 수 있음

$A \backslash B$	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

$A \backslash B$	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	m_0	m_1
A	m_2	m_3

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

카르노 맵(Karnaugh map)

- 카르노 맵을 사용하는 방법
  - 출력이 1이 되는 최소항을 카르노 맵에 1을 넣음
  - 나머지 빈 곳은 0으로 채우거나 비워도 됨
  - 무관항 : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 최소항임
    - 카르노 맵에 ×나 d로 표시함

$A \backslash B$	0	1
0	1	
1		1

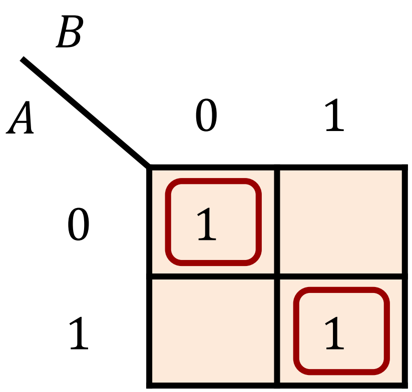
$$F = \sum m(0,3)$$

$A \backslash B$	0	1
0	1	×
1		1

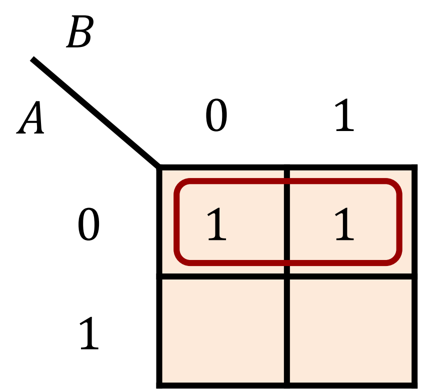
$$F = \sum m(0,3) + \sum d(1)$$

카르노 맵(Karnaugh map)

- 카르노 맵을 묶을 때의 규칙
  ① 출력이 같은 항을 1, 2, 4, 8, 16개로 그룹을 지어 묶음
  ② 바로 이웃한 항들끼리 묶음
  ③ 반드시 직사각형이나 정사각형의 형태로 묶어야 함
  ④ 최대한 크게 묶음
  ⑤ 중복하여 묶어서 간소화된다면 중복하여 묶음
  ⑥ 무관항의 경우 간소화될 수 있으면 묶어 주고, 그렇지 않으면 묶지 않음



$$F = \bar{A}\bar{B} + AB$$



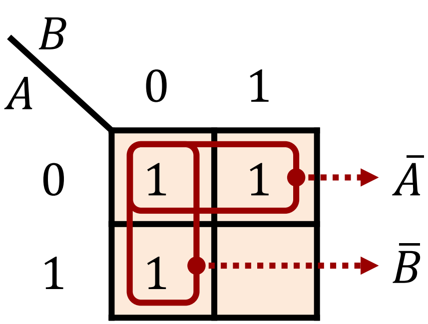
$$\begin{aligned} F &= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B \\ &= \bar{A}(\bar{B} + B) \\ &= \bar{A} \end{aligned}$$

카르노 맵(Karnaugh map)

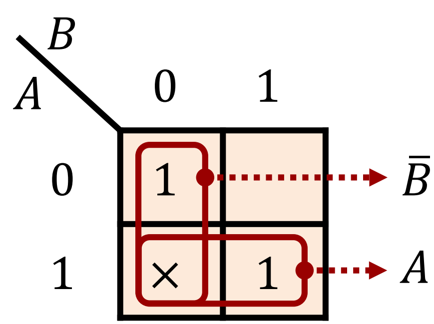
- 카르노 맵을 묶음
  - 예,

입력		출력
A	***B***	***F***
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

입력		출력
A	***B***	***F***
0	0	1
0	1	0
1	0	×
1	1	1



$$F = \bar{A} + \bar{B}$$



$$F = A + \bar{B}$$

3변수 카르노 맵

- 한 변에 한 개의 변수를 사용하고, 한 변에 두 개의 변수를 같이 사용하면 3변수 카르노 맵을 표현이 가능함
- 이웃하는 항들의 차이가 한 비트만 되어야 함

$A \backslash BC$	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
A	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

$C \backslash AB$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	AB	$A\bar{B}$
$\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
C	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

$AB \backslash C$	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
$\bar{A}B$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
AB	$AB\bar{C}$	ABC
$A\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

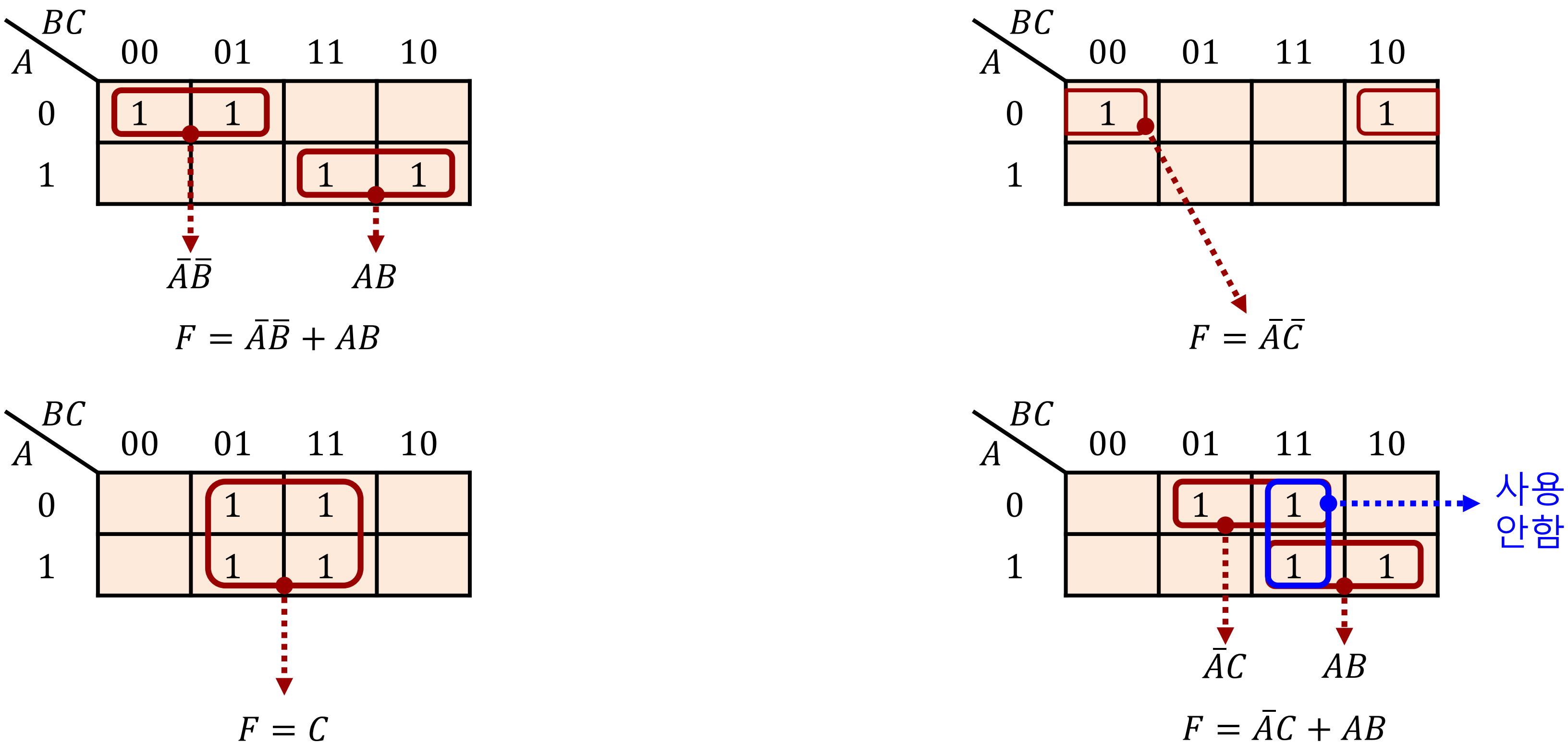
$AB \backslash C$	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

3변수 카르노 맵

- 카르노 맵의 간소화



3변수 카르노 맵

- 카르노 맵의 간소화

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1			1

$\bar{A}$ $\bar{C}$

$F = \bar{A} + \bar{C}$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0				
1				

$F = 0$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

AC BC AB

$F = AB + AC + BC$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$F = 1$

4변수 카르노 맵

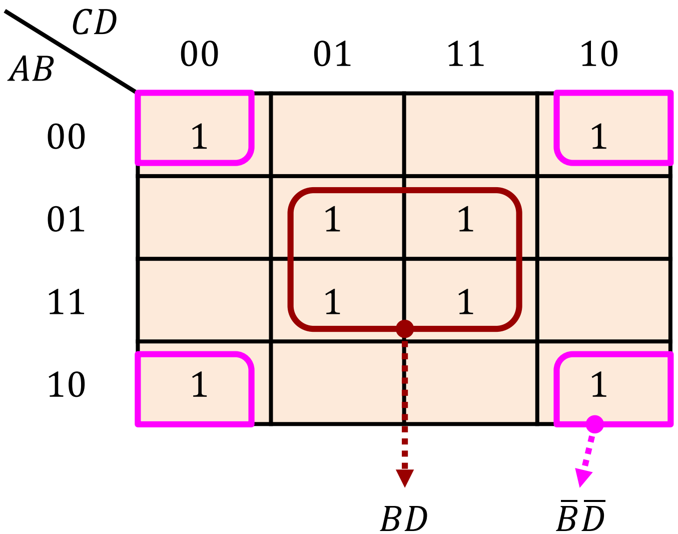
- 세로와 가로에 각각 2개 변수
- 이웃하는 항들의 차이가 한 비트만 되어야 함

$AB \backslash CD$	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
$\bar{A}B$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
AB	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
$A\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

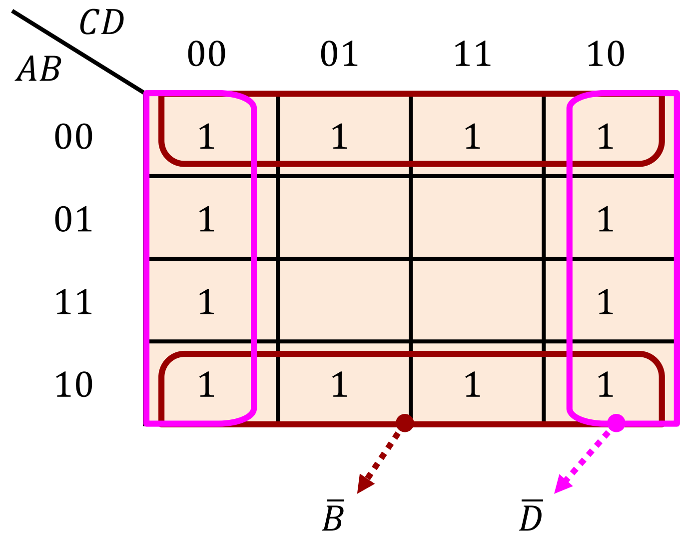
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

4변수 카르노 맵

- 카르노 맵의 간소화



$F = BD + \bar{B}\bar{D}$



$F = \bar{B} + \bar{D}$

선택적 카르노 맵

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$A\bar{B}$ BC $\bar{A}B$

$$F = A\bar{B} + \bar{A}B + BC$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$A\bar{B}$ AC $\bar{A}B$

$$F = A\bar{B} + \bar{A}B + AC$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10	
00	×	×	1	×	$\bar{A}\bar{B}$
01	1	×		×	$\bar{A}\bar{D}$
11	×	1	1	×	AB
10	×				

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}\bar{D}$$

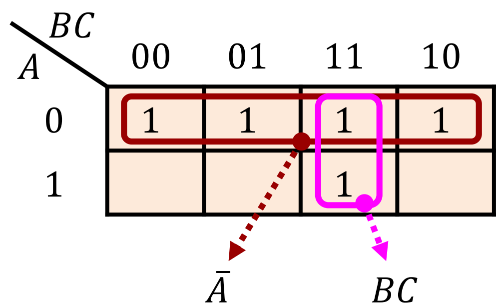
$AB \backslash CD$	00	01	11	10	
00	×	×	1	×	$\bar{A}\bar{B}$
01	1	×		×	$B\bar{C}$
11	×	1	1	×	AB
10	×				

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{C}$$

논리식의 카르노 맵 작성

- 주어진 논리식으로부터 카르노 맵 작성이 가능함
  - 최소항으로 바꾸는 방법

$$\begin{aligned} F &= ABC + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} \\ &= ABC + \bar{A}B(\bar{C} + C) + \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) \\ &= ABC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C \\ &= \sum m(0,1,2,3,7) \end{aligned}$$



$F = \bar{A} + BC$

논리식의 카르노 맵 작성

- 주어진 논리식으로부터 카르노 맵 작성이 가능함
  - 논리식으로부터 바로 작성하는 방법

$$F = ABC + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$$

A \ BC	00	01	11	10
0				
1			1	

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

$\bar{A}$ BC

$$F = \bar{A} + BC$$

5변수 카르노 맵

- 4변수 카느로 맵의 2개로 나눔

$A = 0$

BC \ DE	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	DE	$D\bar{E}$
$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}DE$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$
$\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}E$	$\bar{A}\bar{B}CDE$	$\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}$
BC	$\bar{A}BC\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}BC\bar{D}E$	$\bar{A}BCDE$	$\bar{A}BCD\bar{E}$
$B\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}E$	$\bar{A}B\bar{C}DE$	$\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}$

$A = 1$

BC \ DE	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	DE	$D\bar{E}$
$\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$	$A\bar{B}\bar{C}DE$	$A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$
$\bar{B}C$	$A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$	$A\bar{B}C\bar{D}E$	$A\bar{B}CDE$	$A\bar{B}CD\bar{E}$
BC	$ABC\bar{D}\bar{E}$	$ABC\bar{D}E$	$ABCDE$	$ABCD\bar{E}$
$B\bar{C}$	$AB\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$AB\bar{C}\bar{D}E$	$AB\bar{C}DE$	$AB\bar{C}D\bar{E}$

$A = 0$

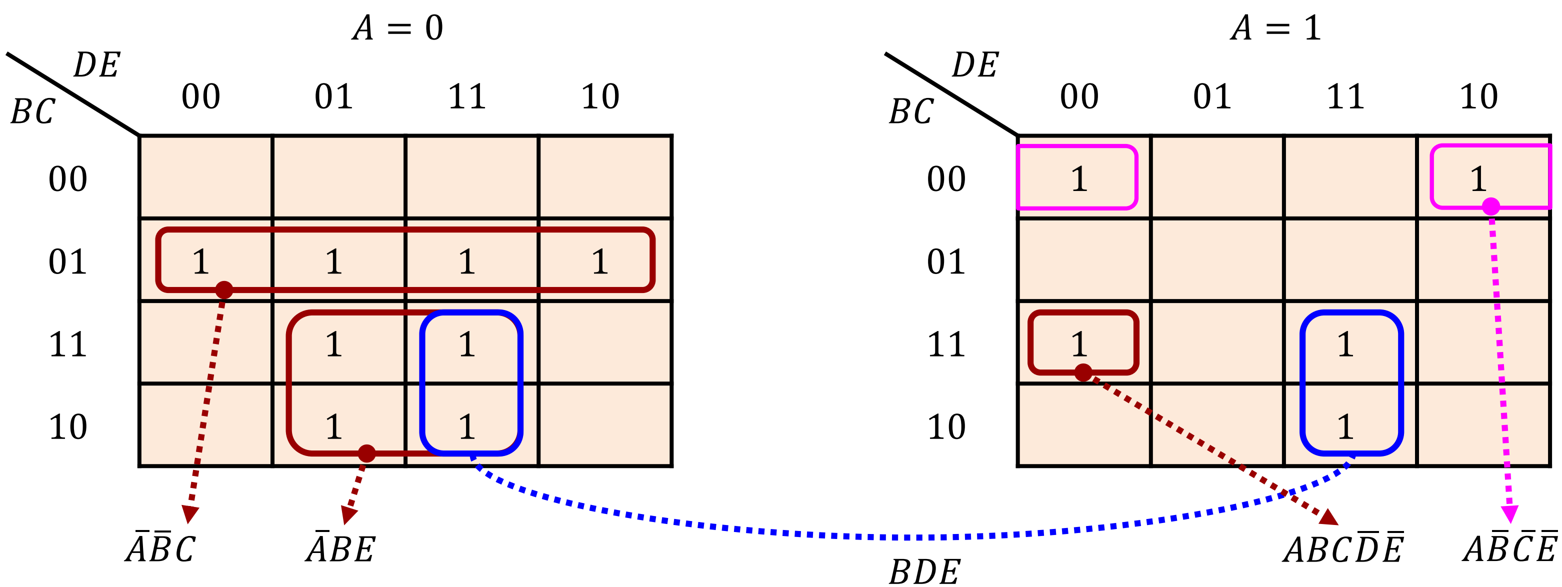
BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$A = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

5변수 카르노 맵

- 4변수 카느로 맵의 2개로 나눔



$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BE + BDE + ABC\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}\bar{E}$$

6변수 카르노 맵

- 4변수 카르노 맵의 4개로 나눔

$AB = 00$

$CD \backslash EF$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$AB = 01$

$CD \backslash EF$	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$AB = 10$

$CD \backslash EF$	00	01	11	10
00	48	49	51	50
01	52	53	55	54
11	60	61	63	62
10	56	57	59	58

$AB = 11$

$CD \backslash EF$	00	01	11	10
00	32	33	35	34
01	36	37	39	38
11	44	45	47	46
10	40	41	43	42

퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 카르노 맵 : 입력 변수 4개 이하이면 사용하기 편함
- 퀸-맥클러스키(QM) 알고리즘 : 입력 변수 5개 이상이면 사용하기 더 유용함
  - 크게 2가지 단계로 나눌 수 있음
    ① $ABC + AB\bar{C} = AB(C + \bar{C}) = AB$ 법칙을 적용하여 변수를 하나씩 제거해 나가는 단계
    ② 차트를 이용해 최종 논리식을 구하는 단계
    구체적인 과정은 다음과 같음

1	진리표에서 최소항을 모두 찾음	5	주항(PI: prime implicants)를 찾음
2	최소항들을 인텍스를 매겨 그룹화함	6	필수 주항(EPI: essential PI)를 찾음
3	그룹 내의 항들로부터 간소화함	7	EPI에 포함되는 PI들을 제거함
4	간소화되지 않을 때까지 3의 과정을 반복함	8	EPI에 포함되지 않은 항들에 대해 SOP 식을 찾음

퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 예 : QM 알고리즘을 이용해 다음과 같은 논리식을 간소화함

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,3,5,7,8,10,12,13,15)$$

$ABCD$	10진수	인덱스
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	1
0011	3	2
0101	5	2
0111	7	3
1000	8	1
1010	10	2
1100	12	2
1101	13	3
1111	15	4

인덱스	10진수	$ABCD$
0	0	0000
1	1	0001
	2	0010
	8	1000
2	3	0011
	5	0101
	10	1010
	12	1100
3	7	0111
	13	1101
4	15	1111

인덱스	10진수	$ABCD$
0	(0,1)	000-
	(0,2)	00-0
	(0,8)	-000
1	(1,3)	00-1
	(1,5)	0-01
	(2,3)	001-
	(2,10)	-010
	(8,10)	10-0
	(8,12)	1-00
2	(3,7)	0-11
	(5,7)	01-1
	(5,13)	-101
	(12,13)	110-
3	(7,15)	-111
	(13,15)	11-1

인덱스	10진수	$ABCD$
0	(0,1,2,3)	00--
	(0,2,8,10)	-0-0
1	(1,3,5,7)	0--1
2	(5,7,13,15)	-1-1

퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 예 : QM 알고리즘을 이용해 다음과 같은 논리식을 간소화함

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,3,5,7,8,10,12,13,15)$$

  - 간소화되지 않을 때까지 찾은 PI들은 다음과 같음
$$A\bar{C}\bar{D}, AB\bar{C}, \bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{D}, \bar{A}D, BD$$
  - EPI를 찾기 위해서 다음과 같은 차트를 만들게 함

PI		0	1	2	3	5	7	8	10	12	13	15
$\bar{A}\bar{B}$	00--	×	×	×	×							
$\bar{B}\bar{D}$	-0-0	×		×				×	(×)			
$\bar{A}D$	0--1		×		×	×	×					
BD	-1-1					×	×				×	(×)
$A\bar{C}\bar{D}$	1-00							×		×		
$AB\bar{C}$	110-									×	×	

퀸-맥클러스키 간소화 알고리즘

- 예 : QM 알고리즘을 이용해 다음과 같은 논리식을 간소화함

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,3,5,7,8,10,12,13,15)$$

  - 간소화되지 않을 때까지 찾은 PI들은 다음과 같음
    $$A\bar{C}\bar{D}, AB\bar{C}, \bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{D}, \bar{A}D, BD$$
  - 찾은 EPI : $\bar{B}\bar{D}, BD$
  - EPI에 포함되지 않은 항들은 아래 표에 나와 있음

PI		1	3	12
$\bar{A}\bar{B}$	00--	×	×	
$\bar{A}D$	0--1	×	×	
$A\bar{C}\bar{D}$	1-00			×
$AB\bar{C}$	110-			×

$$F = \bar{B}\bar{D} + BD + \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}\bar{D}$$
$$F = \bar{B}\bar{D} + BD + \bar{A}D + A\bar{C}\bar{D}$$
$$F = \bar{B}\bar{D} + BD + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}$$
$$F = \bar{B}\bar{D} + BD + \bar{A}D + AB\bar{C}$$

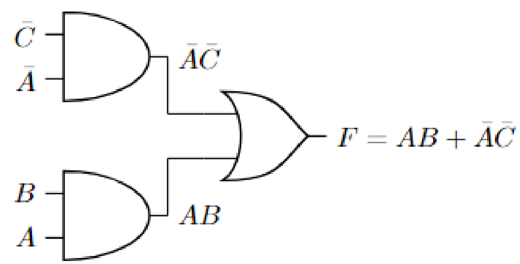
여러 개의 출력 함수

- 실제 디지털 시스템들을 별도로 설계하는 대신에 서로 공유 가능한 게이트를 공유하여 통합한 시스템을 구성함

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,6,7) \qquad G(A,B,C) = \sum m(1,3,6,7)$$

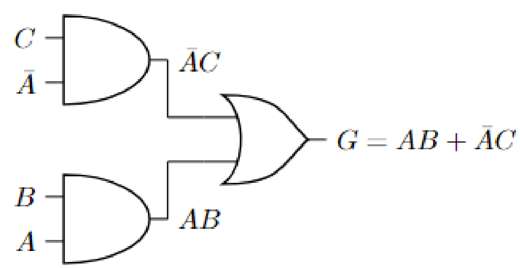
$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1			1
1			1	1

$F = AB + \bar{A}\bar{C}$



$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

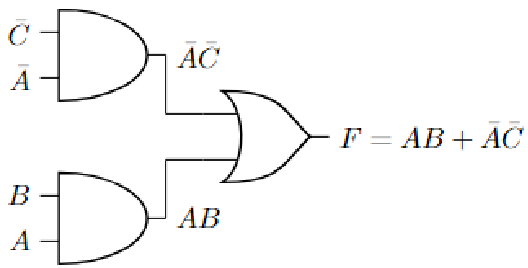
$G = AB + \bar{A}C$

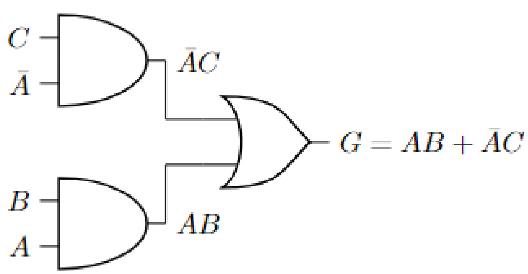


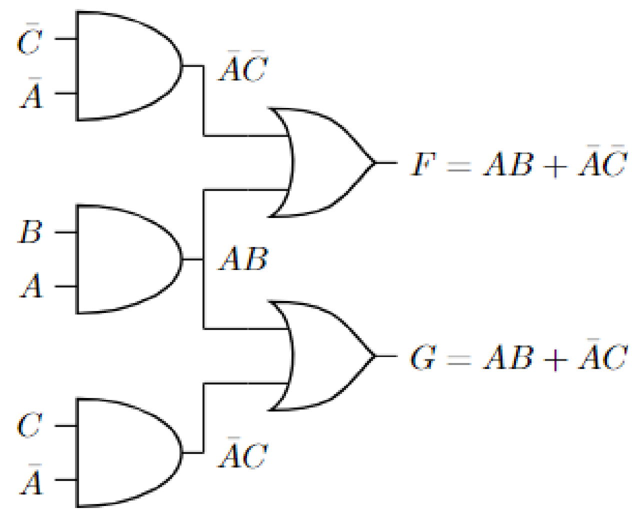
여러 개의 출력 함수

- 실제 디지털 시스템들을 별도로 설계하는 대신에 서로 공유 가능한 게이트를 공유하여 통합한 시스템을 구성함

$F(A,B,C) = \sum m(0,2,6,7)$ $\quad$ $G(A,B,C) = \sum m(1,3,6,7)$







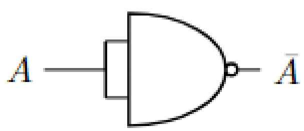
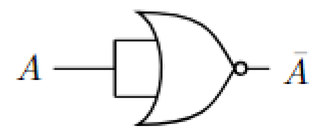
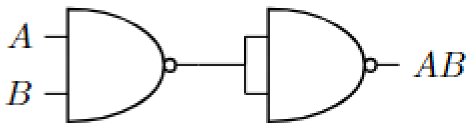
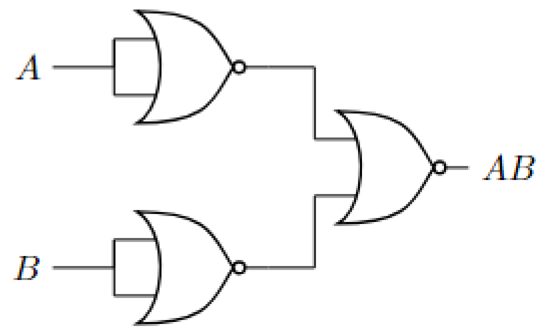
NAND와 NOR 게이트로의 변환

- NAND와 NOR 게이트만으로 모든 회로를 만들 수 있음

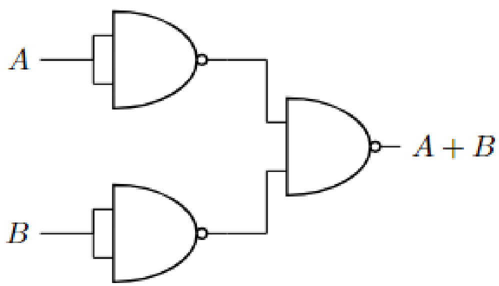
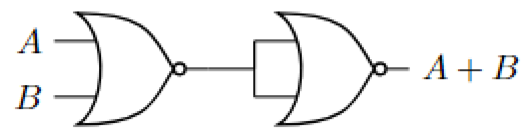
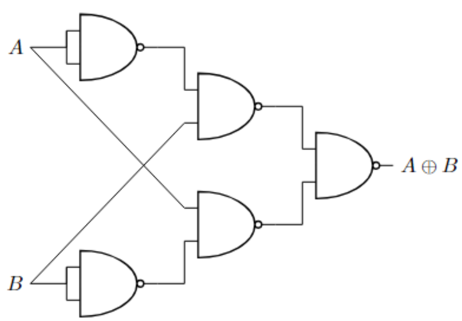
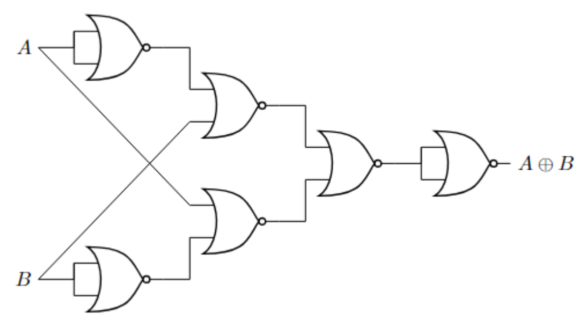
→NAND와 NOR 게이트는 만능 게이트라고 불림

NOT	$\bar{A} = \overline{A + A} = \overline{A \cdot A}$
AND	$AB = \overline{\overline{AB}} = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$
OR	$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$
NAND	$\overline{AB} = \overline{\overline{\overline{AB}}} = \overline{\overline{\bar{A} + \bar{B}}}$
NOR	$\overline{A + B} = \overline{\overline{\overline{A + B}}} = \overline{\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}}$
XOR	$\bar{A}B + A\bar{B} = \overline{\overline{\bar{A}B + A\bar{B}}} = \overline{\overline{\bar{A}B} \cdot \overline{A\bar{B}}}$ $= \overline{(A + \bar{B})(\bar{A} + B)}$ $= \overline{A + \bar{B}} + \overline{\bar{A} + B}$ $= \overline{\overline{\overline{A + \bar{B}} + \overline{\bar{A} + B}}}$

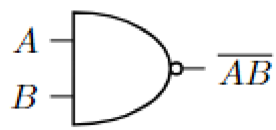
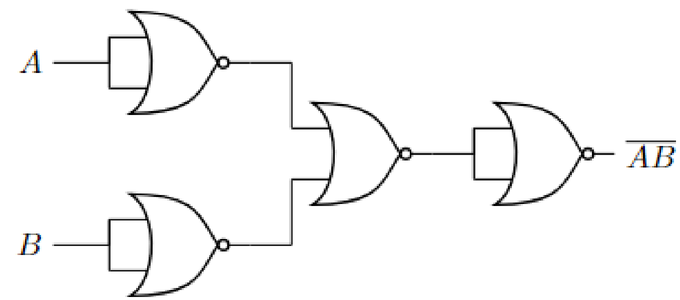
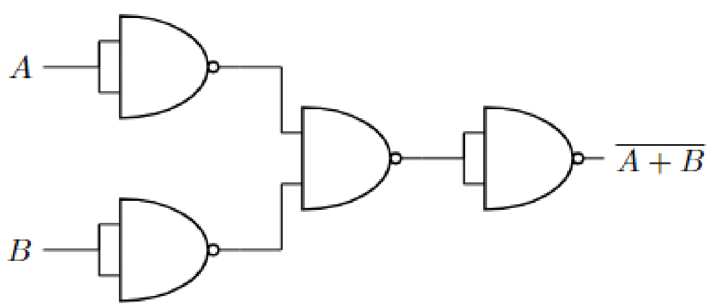
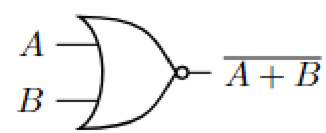
NAND와 NOR 게이트로의 변환

기본 게이트	NAND 게이트 표현	NOR 게이트 표현
NOT		
AND		

NAND와 NOR 게이트로의 변환

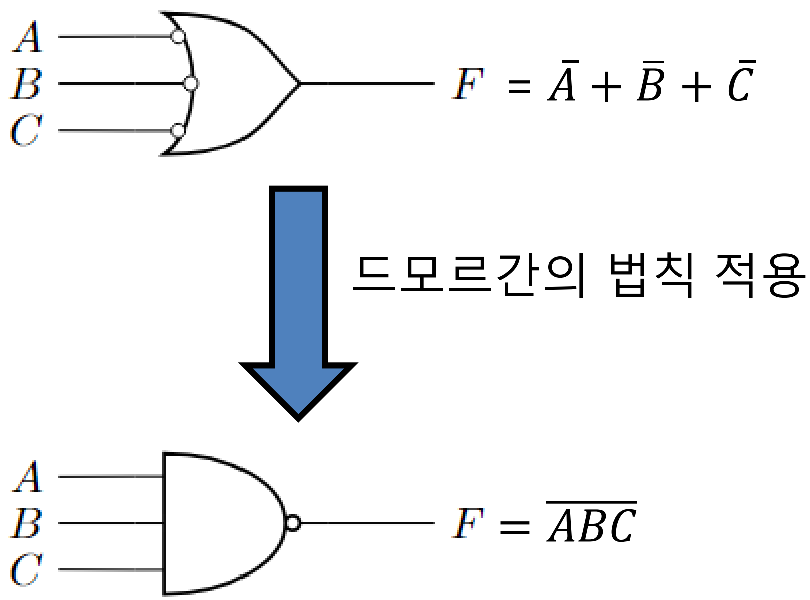
<table>
<tr><th>기본
게이트</th><th>NAND 게이트 표현</th><th>NOR 게이트 표현</th></tr>
<tr><td>OR</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>XOR</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

NAND와 NOR 게이트로의 변환

기본 게이트	NAND 게이트 표현	NOR 게이트 표현
NAND		
NOR		

NAND와 NOR 게이트로의 변환

- NAND 게이트만으로 나타내는 경우

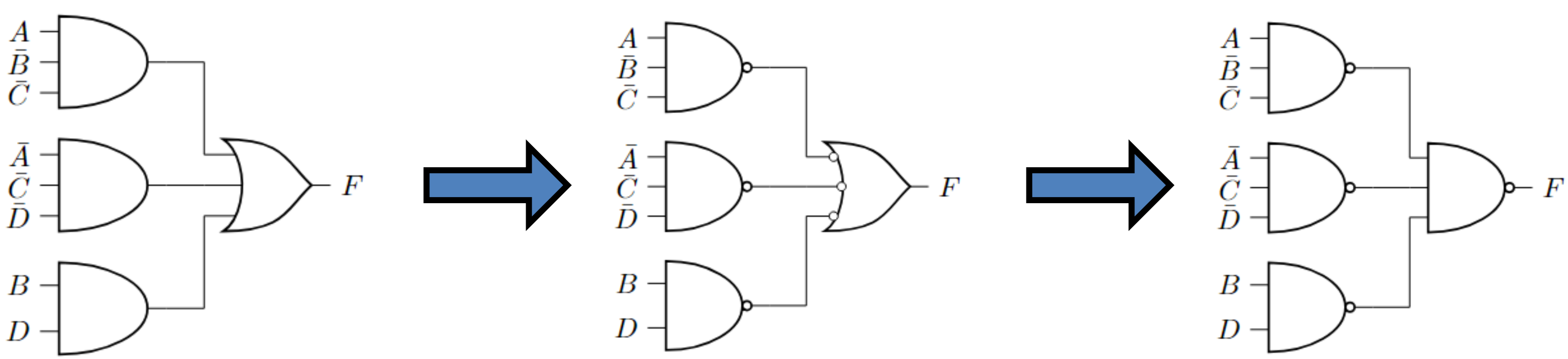


NAND와 NOR 게이트로의 변환

- NAND 게이트만으로 나타내는 경우

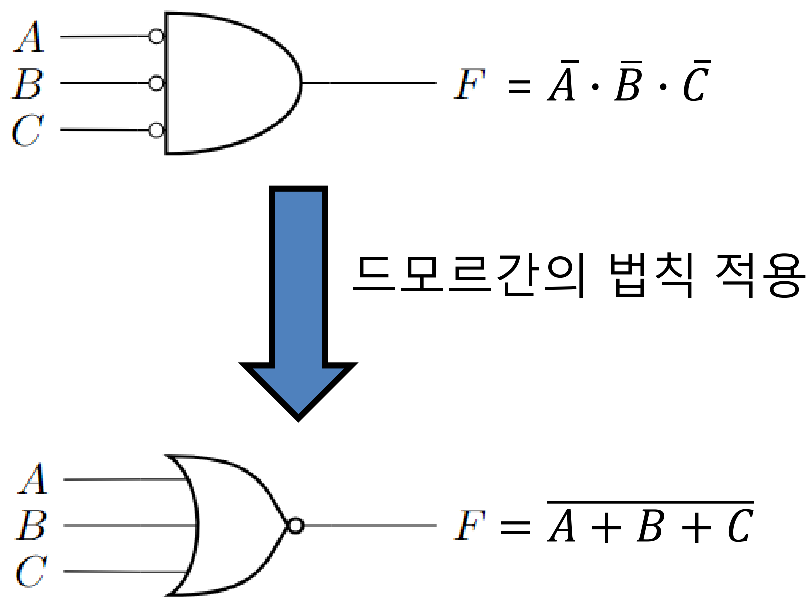
$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1			
01	1	1	1	
11		1	1	
10	1	1		

$$F = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + BD$$



NAND와 NOR 게이트로의 변환

- NOR 게이트만으로 나타내는 경우

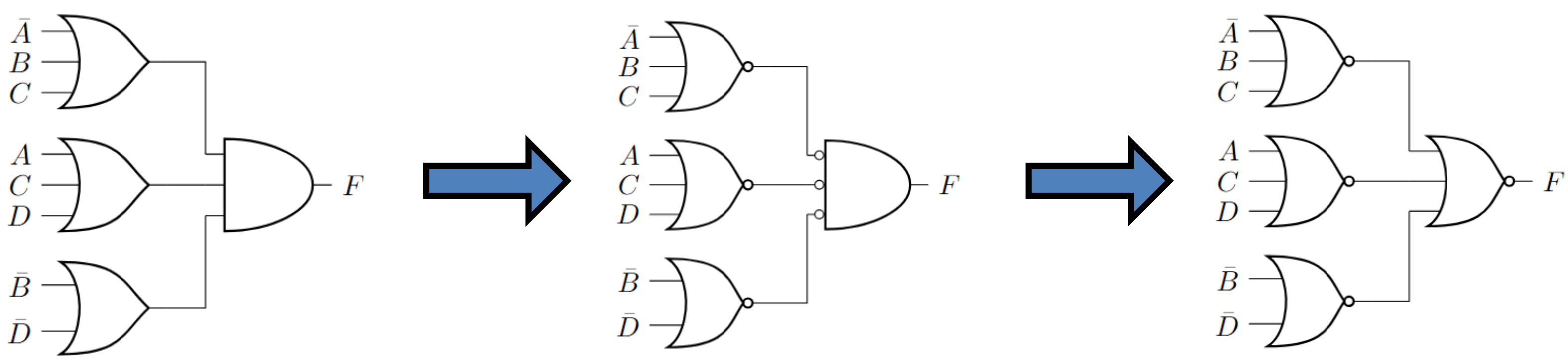


NAND와 NOR 게이트로의 변환

- NOR 게이트만으로 나타내는 경우

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	1

$$F = (A + C + D)(\bar{A} + B + C)(\bar{B} + \bar{D})$$



XOR와 XNOR 게이트

- XOR의 카르노 맵 표현

3변수 XOR

A \ BC	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$F = A \oplus B \oplus C$$

4변수 XOR

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

XOR와 XNOR 게이트

- XNOR의 카르노 맵 표현

3변수 XNOR

A \ BC	00	01	11	10
0	1		1	
1		1		1

$$F = \overline{A \oplus B \oplus C}$$
$$= A \odot B \odot C$$

4변수 XNOR

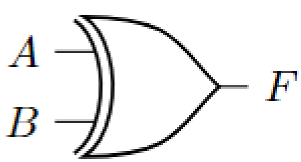
AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01		1		1
11	1		1	
10		1		1

$$F = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D}$$
$$= A \odot B \odot C \odot D$$

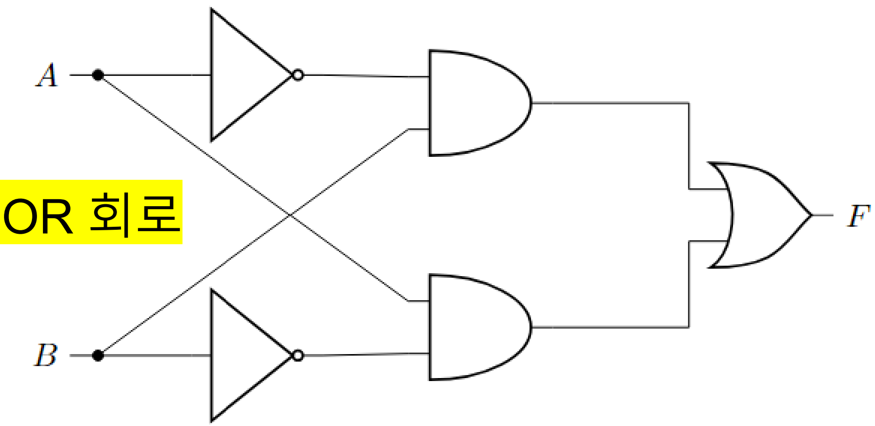
XOR와 XNOR 게이트

- XOR 게이트 표현

기호



NOT-AND-OR 회로



NAND만으로 표현