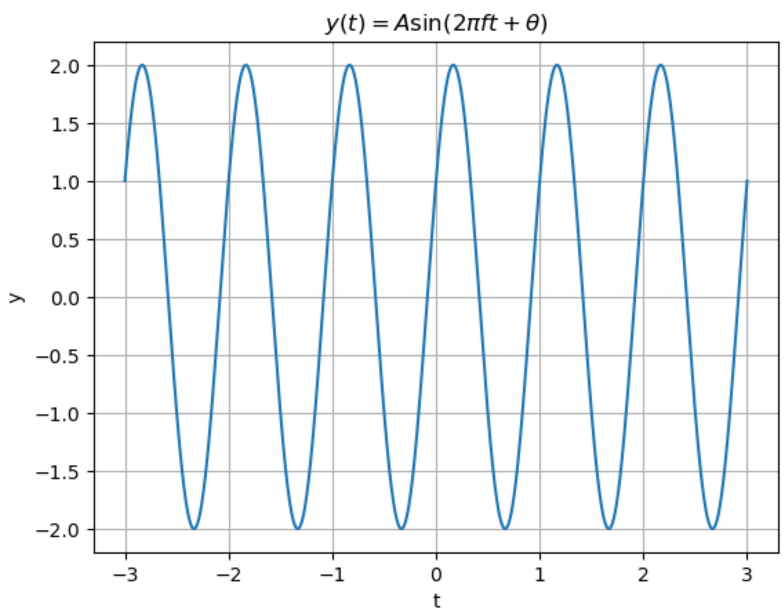
Lecture 03

연속 신호 및 시스템

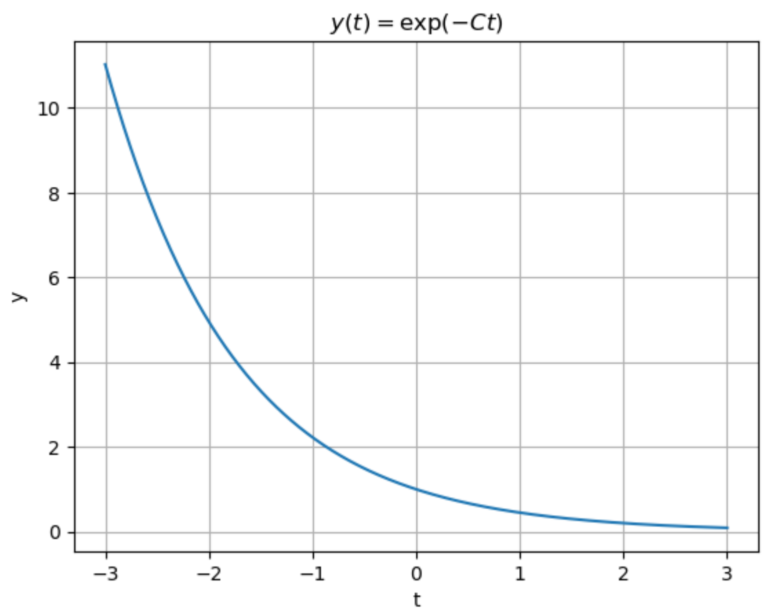
연속 신호

- 모든 연속적인 시간 *t*에 대하여 정의됨
  - 예,

주기 신호

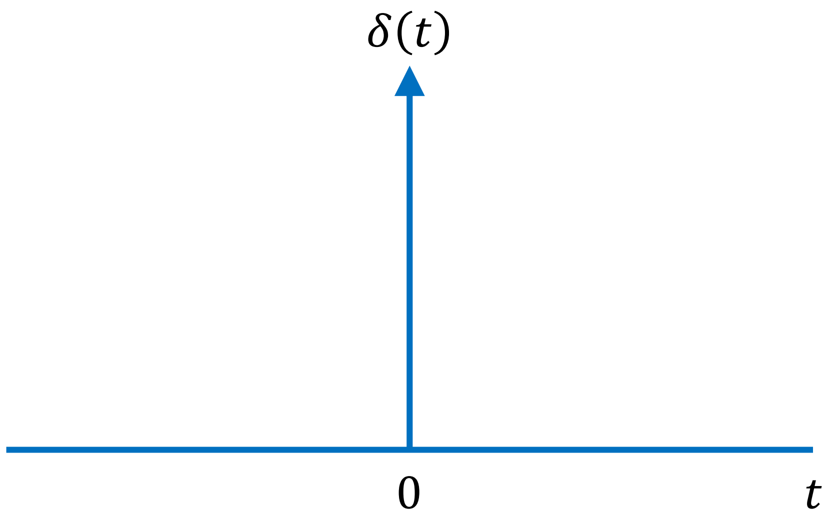


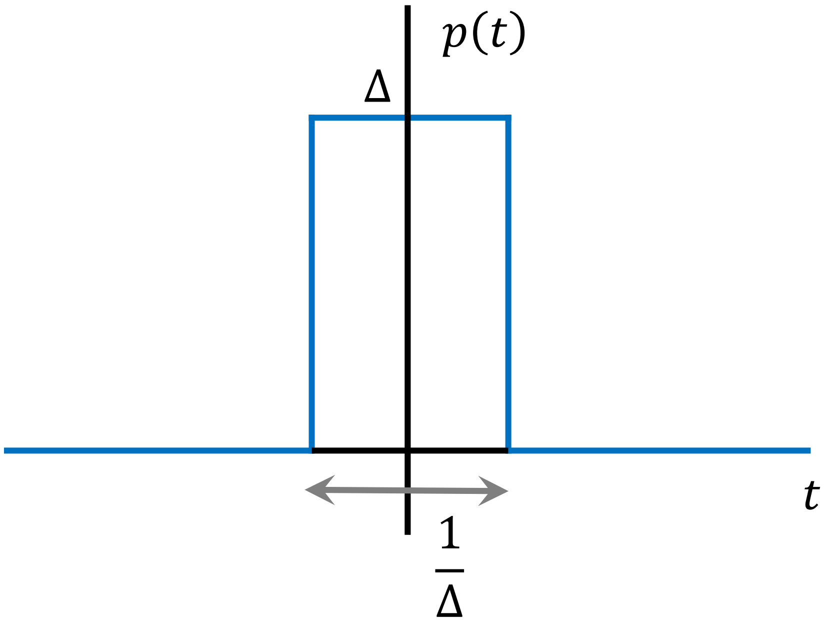
비주기 신호



기본 연속 신호

- 단위 임펄스 함수(**Unit Impulse Function**)
  - 디렉 델타 함수(**Dirac delta function**)라고 부름
  - 정의 : $\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0)$ 또는 $\delta(t) = \lim_{\Delta\to\infty} p(t)$



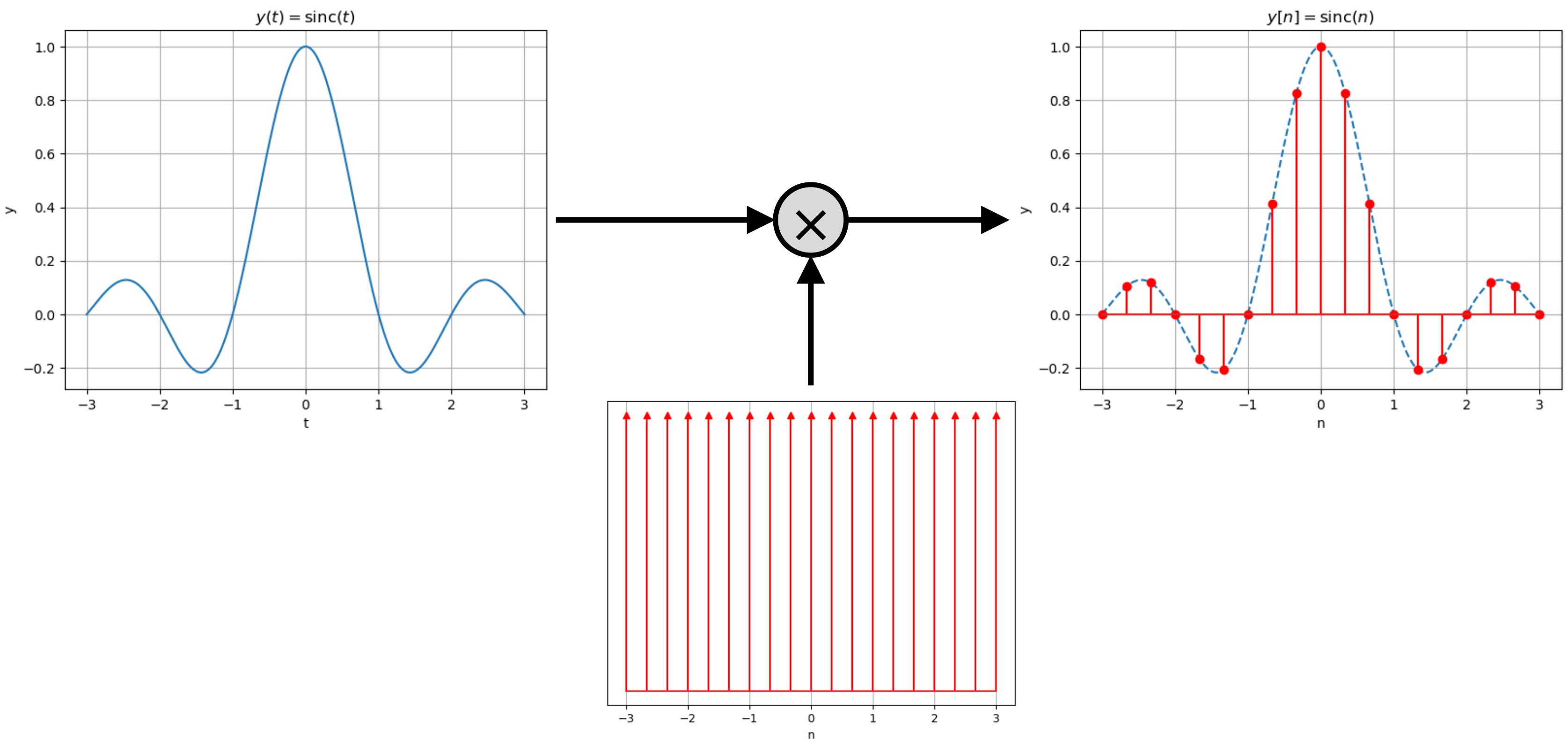


기본 연속 신호

- 단위 임펄스 함수(**Unit Impulse Function**)
  - 다음과 같은 성질을 갖음
    - 함수의 면적은 1로 일정함 : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
    - 우함수의 성질을 갖음 : $\delta(t) = \delta(-t)$
    - 체질 성질(sifting property) : $\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t - t_0) = \begin{cases} x(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$
    - 샘플링 성질 : $x(t)$가 $t = t_0$에서 연속이면 $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

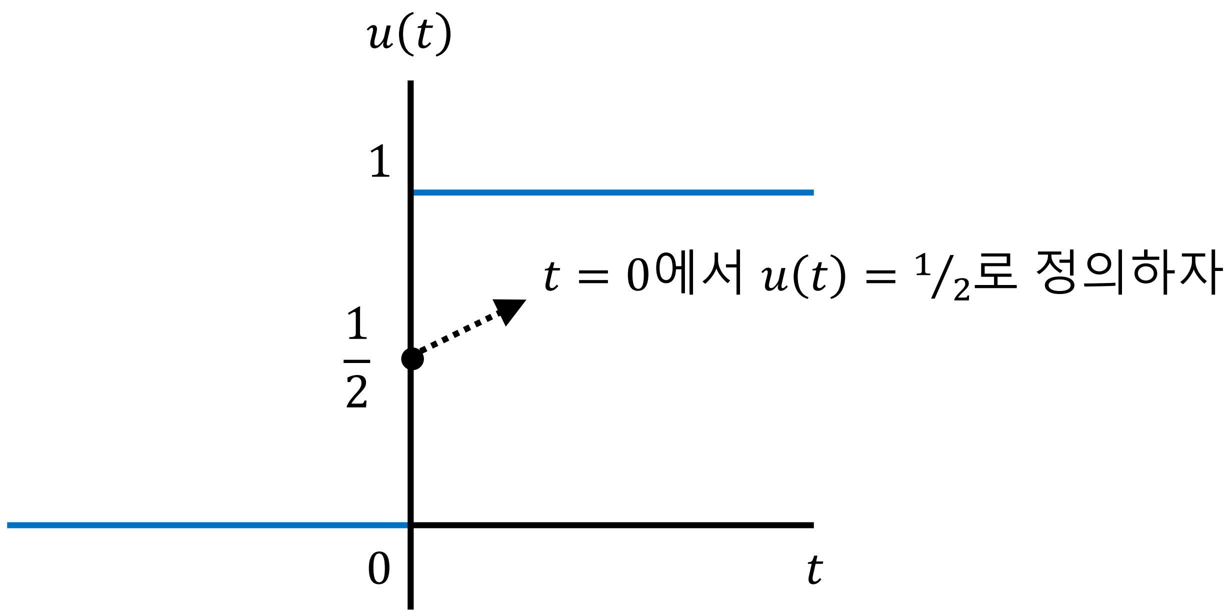
기본 연속 신호

- 단위 임펄스 함수(**Unit Impulse Function**)



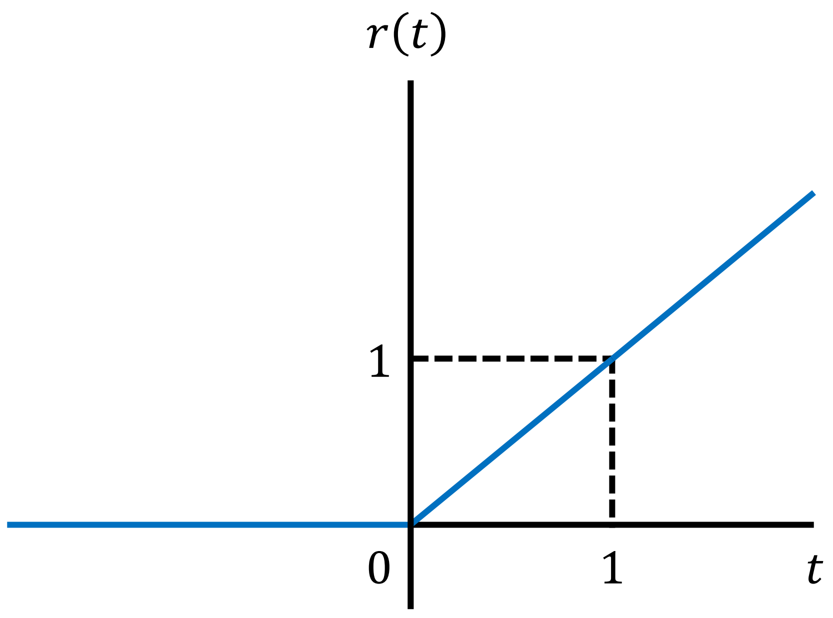
기본 연속 신호

- 단위 계단 함수(**Unit Step Function**)
  - 정의 : $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



기본 연속 신호

- 단위 램프 함수(**Unit Ramp Function**)
  - 정의 : $r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



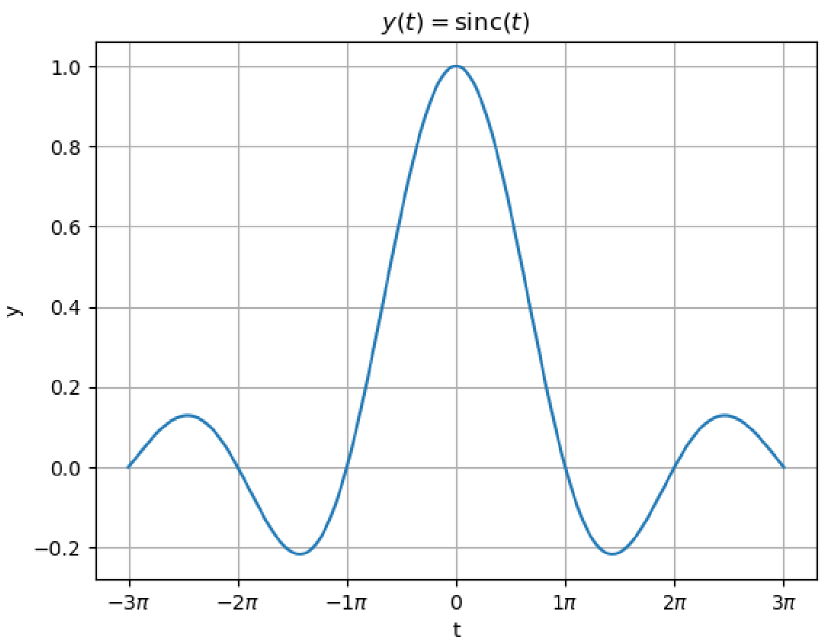
기본 연속 신호

- 샘플링 함수(**Sampling Function**)
  - 연속 신호의 주파수 분석에 자주 사용되는 함수 중 하나임
  - 정의 : $\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$
  - 싱크 함수(sinc function)와 유사함
    - 비 규격화된(unnormalized) 싱크 함수 : $\mathrm{sinc}\, t = \frac{\sin t}{t}$
    - 규격화된(normalized) 싱크 함수 : $\mathrm{sinc}\, t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

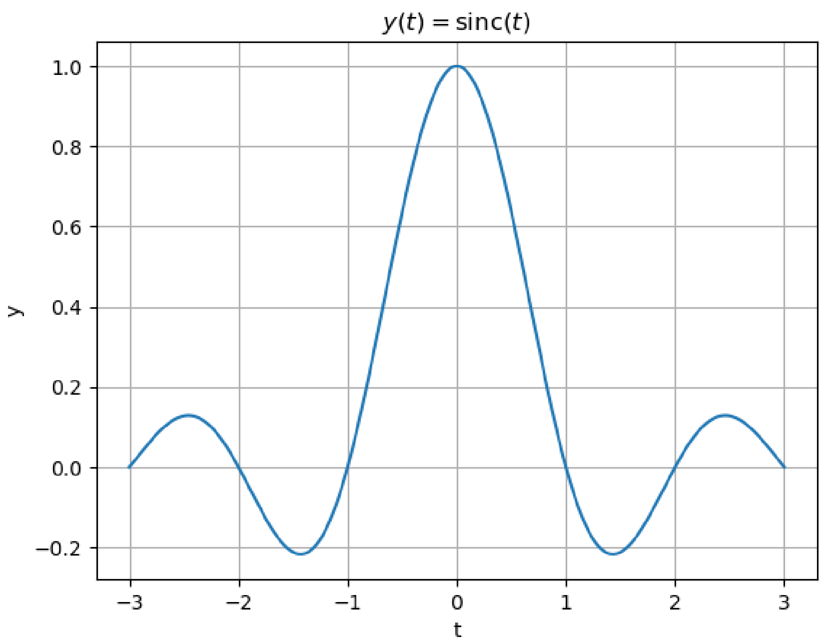
기본 연속 신호

- 샘플링 함수(**Sampling Function**)

비 규격화된 sinc



규격화된 sinc



연속 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 에너지 : 신호의 크기를 제곱한 후 모두 t구간에 대하여 적분한 값

$$E = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} |x(t)|^2 dt$$

  - 에너지 신호 : **유한** E값을 갖고 있음
  - 신호의 **평균 전력**은 다음과 같이 정의됨

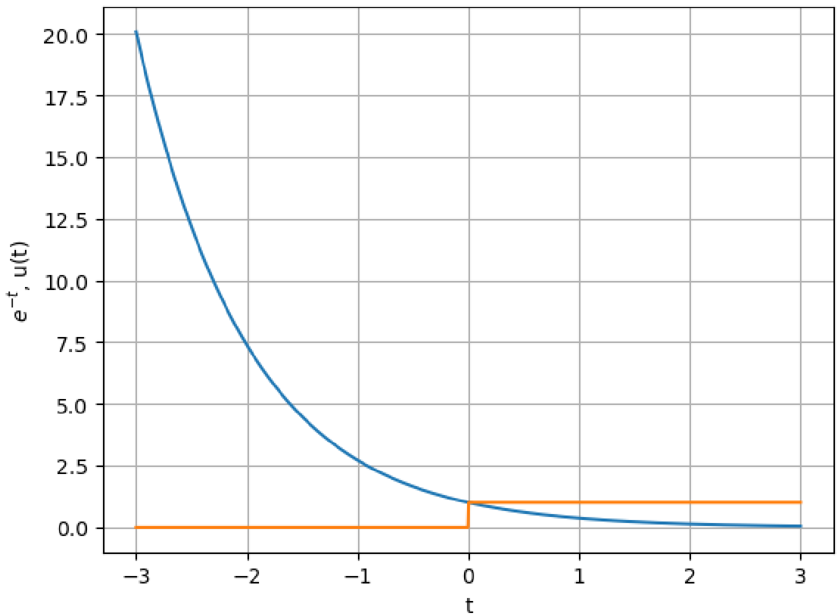
$$P = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} |x(t)|^2 dt$$

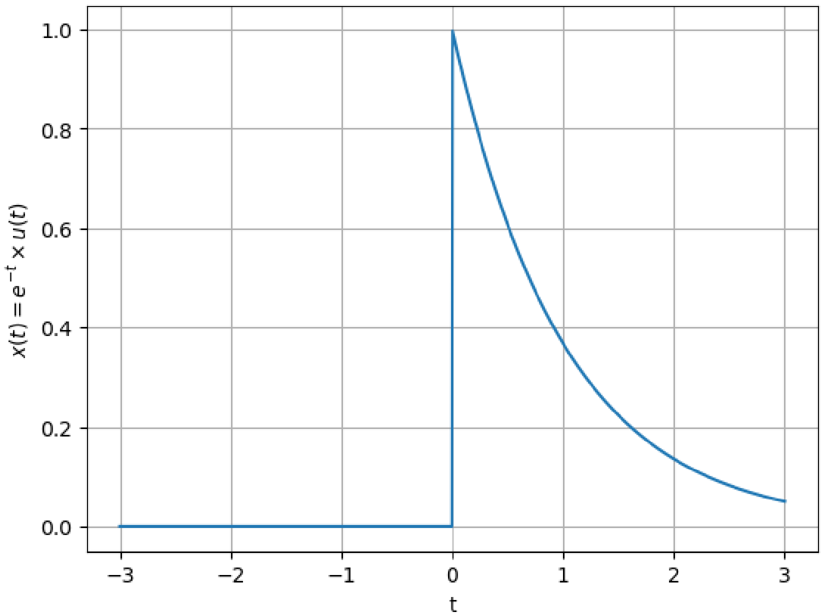
  - 전력 신호 : **유한** P값을 갖고 있음

에너지 E	**전력 P**
유한	0
무한	유한 혹은 무한

연속 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 예, $x(t) = e^{-t}u(t)$





연속 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 예, $x(t) = e^{-t}u(t)$
    - 에너지
      $$E = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}|e^{-t}u(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$
    - $x(t)$는 에너지 신호임
    - $x(t)$의 어제지는 유한하기 때문에 전력은 $P = 0$임

연속 신호 분류

- 주기 신호와 비주기 신호
  - 주기 신호는 다음과 같이 정의됨

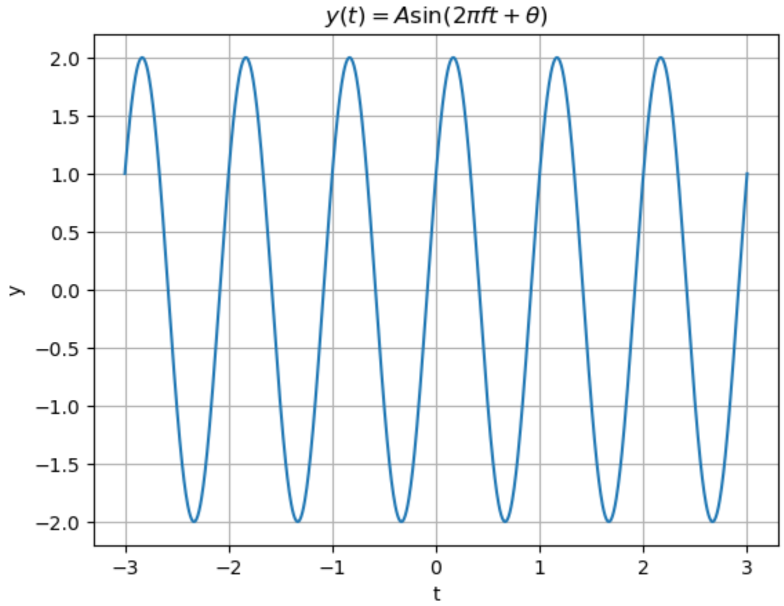
$$x(t) = \underbrace{x(t+nT)}_{\text{같은 모양의 신호가 } T\text{를 주기로 반복됨}},\ n = 1,2,3, \ldots$$

    - T : **주기**
    - $F = {}^{1}/_{T}$: **주파수**
    - 예, $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$
      - $\Omega_0 = 2\pi F$: 각주파수(**radian frequency**)
  - 주기 신호가 아니면 비주기 신호라고 부름
    - 예, $x(t) = e^{-Ct}$

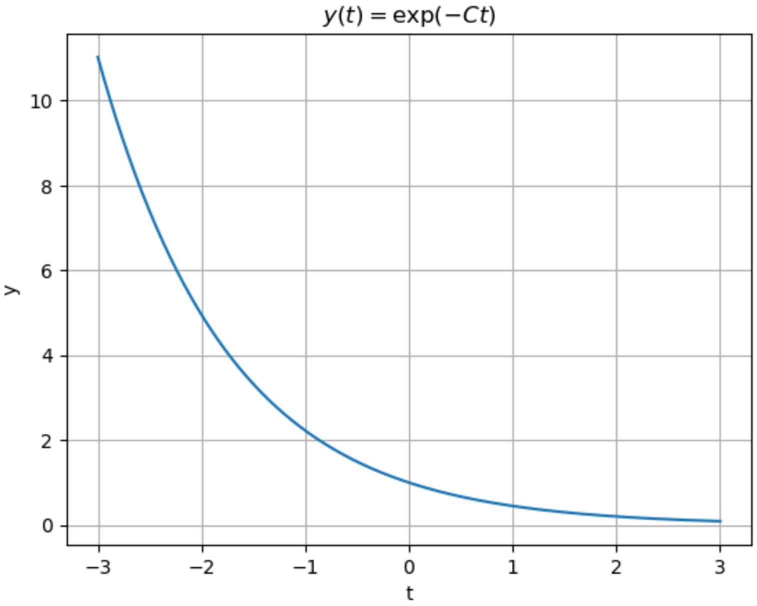
연속 신호 분류

- 주기 신호와 비주기 신호

주기 신호



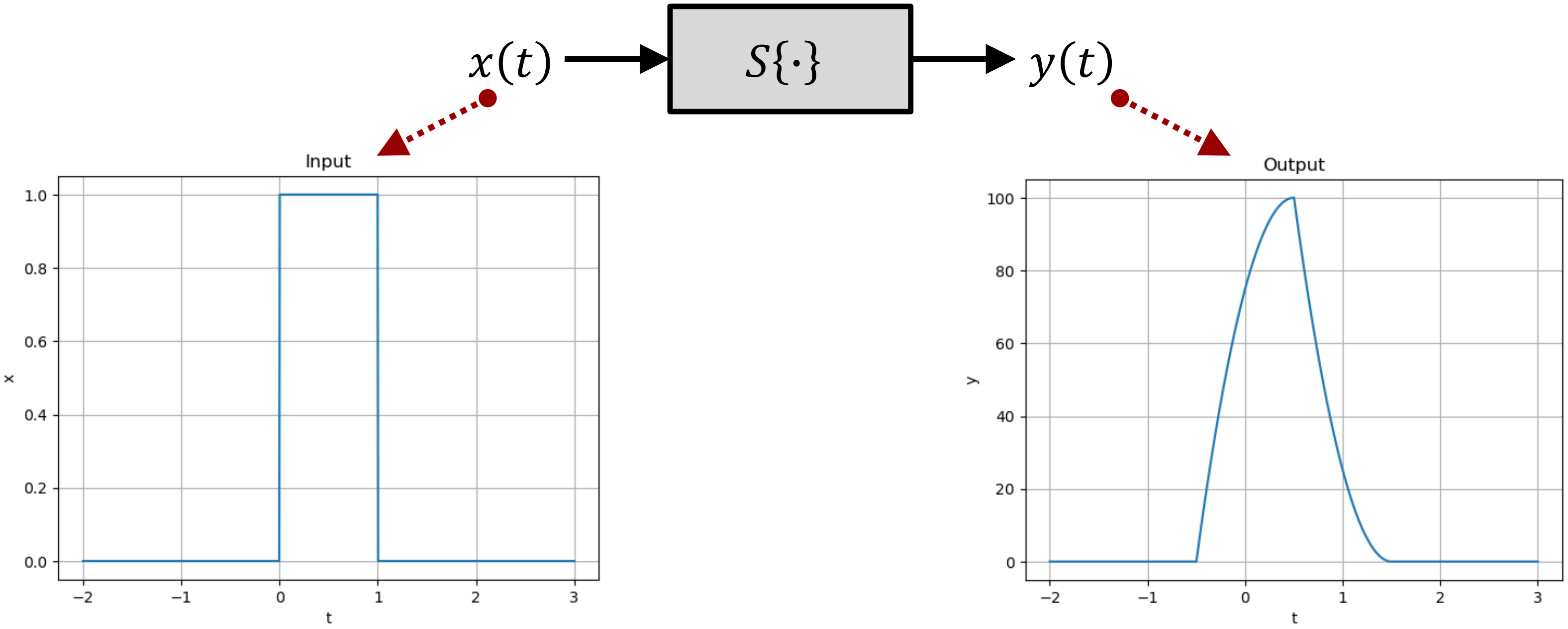
비주기 신호



연속 시스템

- 입력 신호로 **연속 신호**를 받아들여 출력 신호로 **연속 신호**를 내보내게 됨

$$y(t) = S\{x(t)\}$$



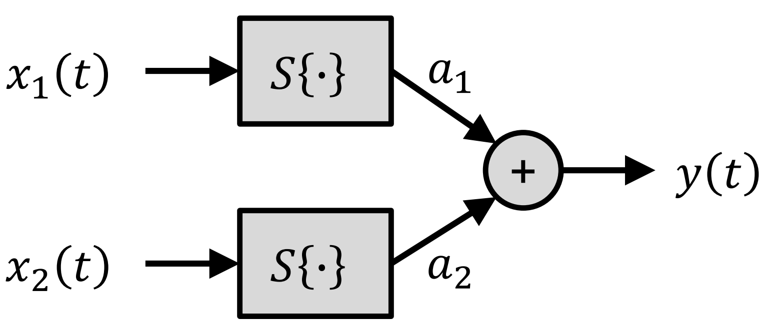
연속 시스템 분류

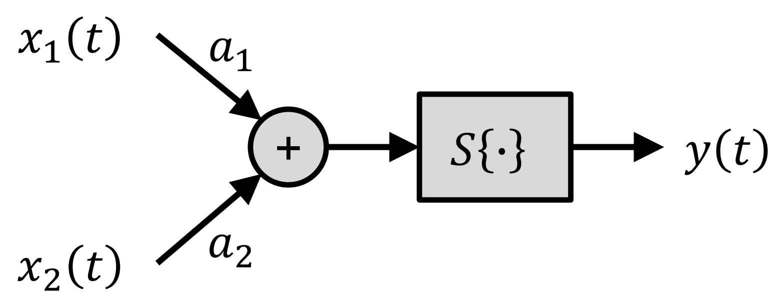
- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 선형 시스템은 중첩의 원리(**superposition principle**)를 만족하는 시스템임

$$S\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 S\{x_1(t)\} + a_2 S\{x_2(t)\}$$

각 입력 신호에 상수를 각각 곱한 새로운 입력 신호에 대한 출력은 각각의 입력 신호에 대한 출력을 먼저 구하고 상수를 곱해 더한 것과 같음

  - a_1과 a_1는 임의의 상수임

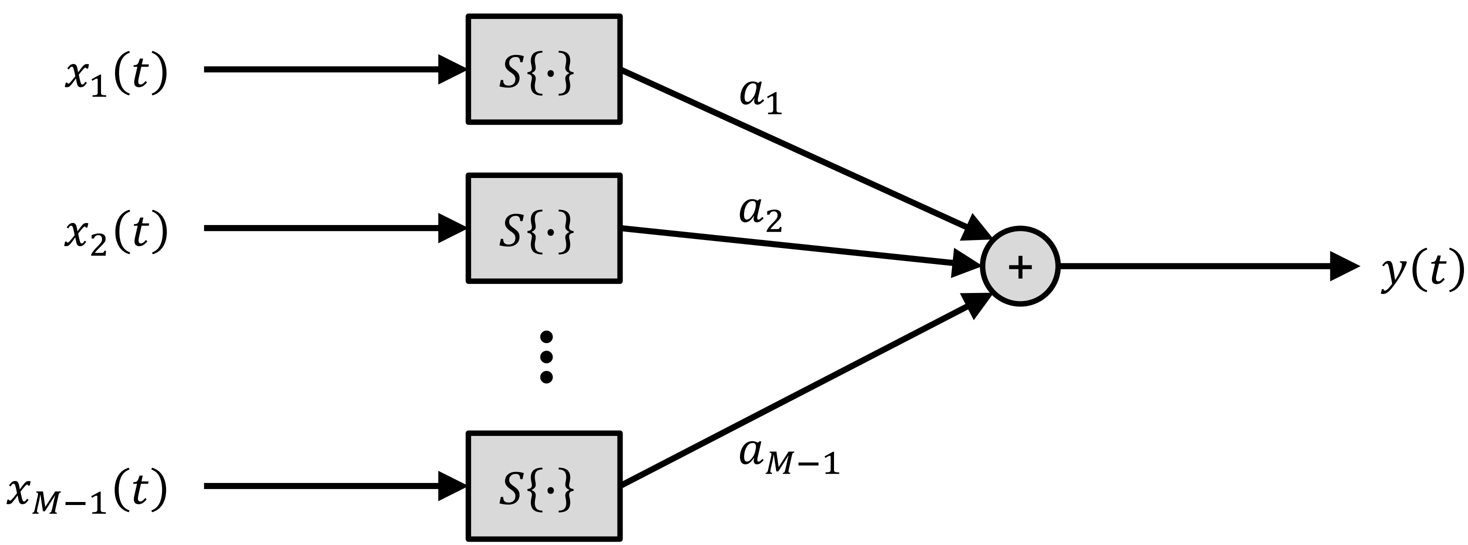




연속 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 선형 시스템을 이용하여 복잡한 신호 $x(t)$를 분석할 수 있음

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k(t) \rightarrow y(t) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k(t)$$



연속 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 예, $y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt}$

$$y_1(t) = 2\frac{dx_1(t)}{dt},\ y_2(t) = 2\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$S\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = 2\frac{d}{dt}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = 2a_1\frac{dx_1(t)}{dt} + 2a_2\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$a_1y_1(t) + a_2y_2(t) = a_1\left\{2\frac{dx_1(t)}{dt}\right\} + a_2\left\{2\frac{dx_2(t)}{dt}\right\} = 2a_1\frac{dx_1(t)}{dt} + 2a_2\frac{dx_2(t)}{dt}$$

선형 시스템

연속 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 예, $y(t) = e^{x(t)}$

$$y_1(t) = e^{x_1(t)},\ y_2(t) = e^{x_2(t)}$$

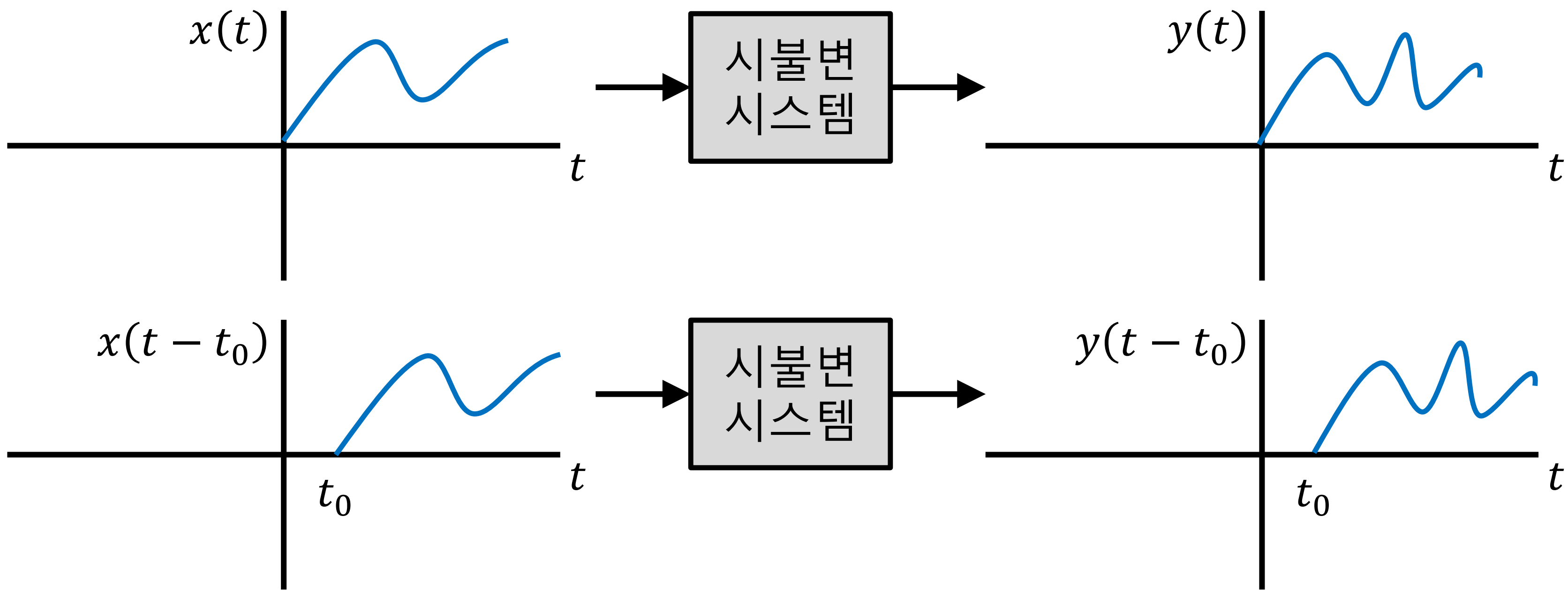
$$S\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = e^{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)} = e^{a_1x_1(t)}e^{a_2x_2(t)}$$

$$a_1y_1(t) + a_2y_2(t) = a_1e^{x_1(t)} + a_2e^{x_2(t)}$$

비선형 시스템

연속 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 시불변 : 시스템의 특성이 시간에 따라 변하지 않음
  - 시변 : 시스템의 특성이 시간에 따라 변함



연속 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 예, $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$

$$y(t - t_0) = \cos\big(x(t - t_0)\big)$$

$$S\{x(t - t_0)\} = \cos\big(x(t - t_0)\big)$$

시불변 시스템

연속 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 예, $y(t) = t\,x(t)$

$$y(t - t_0) = (t - t_0)\,x(t - t_0)$$

$$S\{x(t - t_0)\} = t\{x(t - t_0)\} = tx(t - t_0)$$

시변 시스템

연속 시스템 분류

- 기억(**memory**)과 무기억(**memoryless**) 시스템
  - 무기억 : 현재의 출력 값이 오직 현재의 입력 값에만 의존함
    - 예, $y(t) = 2x(t)$
  - 기억 : 현재의 출력 값이 과거나 미래의 입력 값에 의존함
    - 예, $y(t) = \int_{-t_0}^{t} x(\tau)\, d\tau$

무기억 시스템

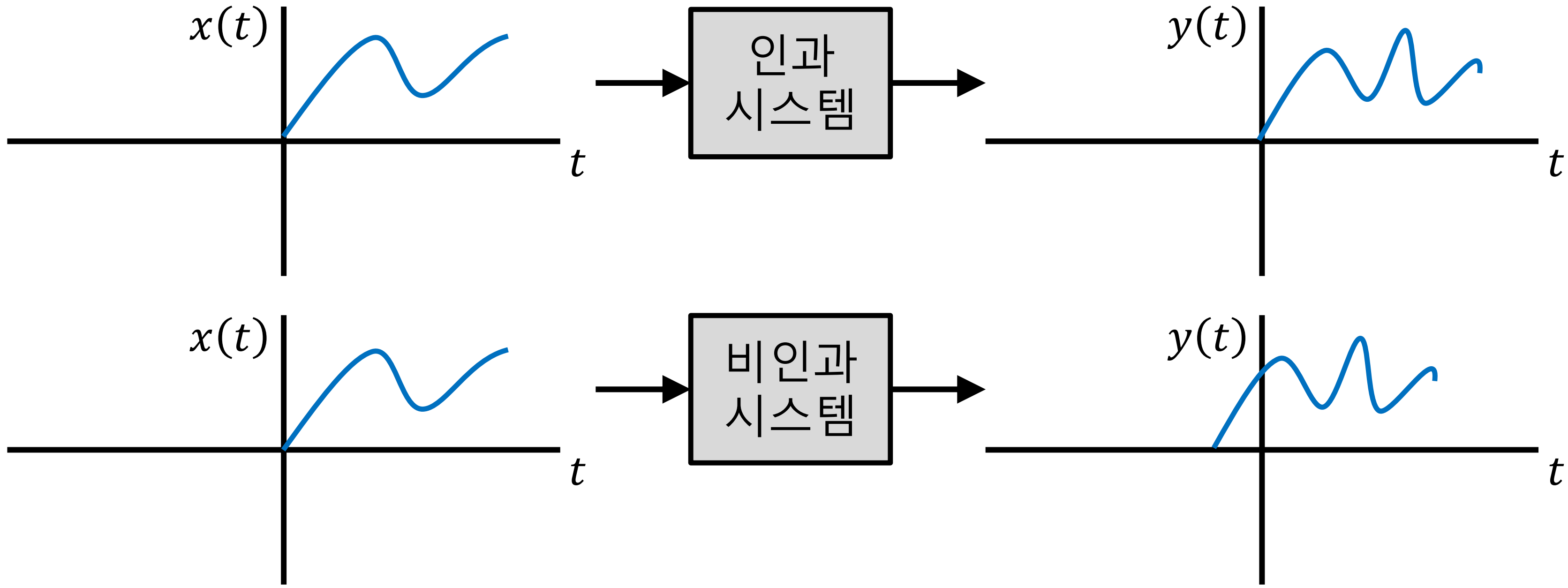
$$x(t) \longrightarrow \boxed{S\{x(t)\}} \longrightarrow y(t)$$

기억 시스템

$$x(t) \longrightarrow \boxed{S\{x(t-t_0), x(t), x(t+t_0)\}} \longrightarrow y(t)$$

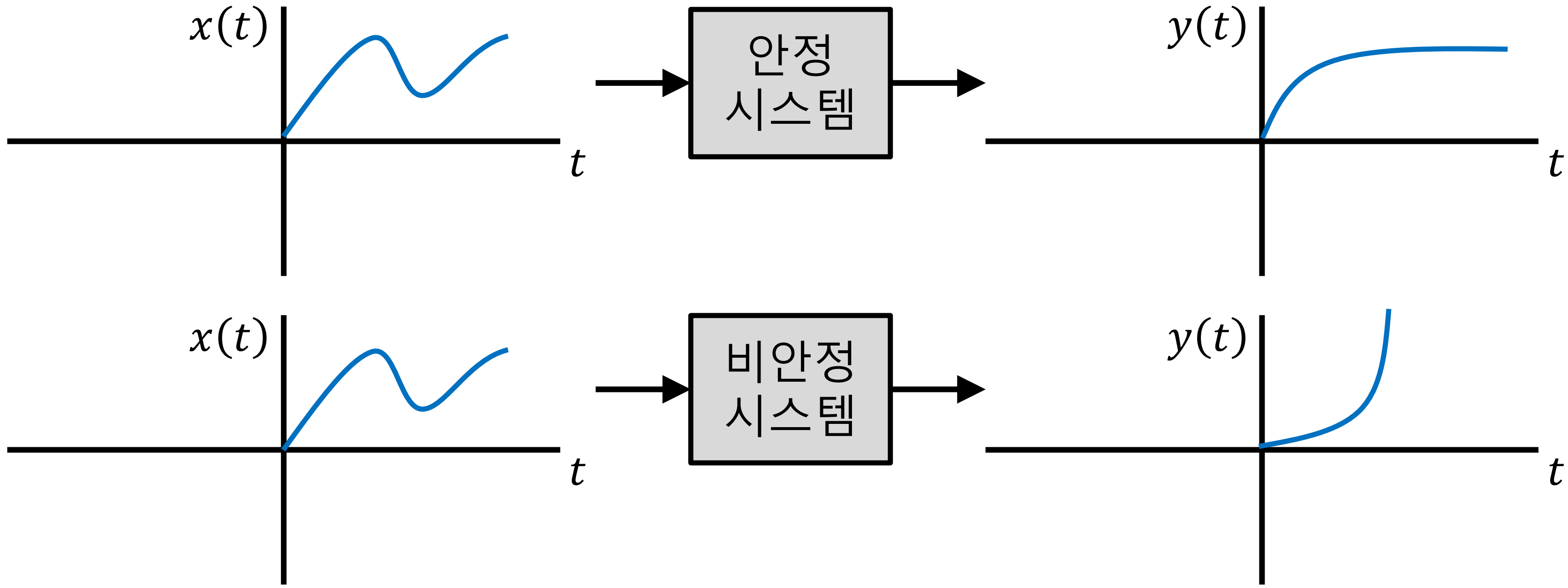
연속 시스템 분류

- 인과(**causal**)과 비인과(**noncausal**) 시스템
  - 인과 : 어느 시각 t_0에서 시스템의 출력이 t_0 이전의 입력 값에 의하여 결정됨
  - 비인과 : 입력 값이 존재하지 않은 구간에 출력을 내보냄



연속 시스템 분류

- 안정(**stable**)과 비안정(**unstable**) 시스템
  - 안정 : 유한 입력 유한 출력(**BIBO: Bounded Input Bounded Output**) 안정도를 만족함
  - 비안정 : BIBO 안정도를 만족하지 않음



연속 선형 시불변 시스템

- LTI(**L**inear **T**ime-**I**nvariant) 시스템이라고 부름
  - 시간에 따라 변화하지 않은 시스템
  - 중첩의 원리(**superposition principle**)를 만족하는 시스템
    - 가산성(additivity) : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
    - 균일성(homogeneity) : $f(ax_1) = af(x_1)$

$$S\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 S\{x_1(t)\} + a_2 S\{x_2(t)\}$$

- 시스템의 임펄스 응답(**impulse response**)
  - 정의 : $h(t) = S\{\delta(t)\}$

$\delta(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{시스템}}$ $\longrightarrow h(t)$

연속 선형 시불변 시스템

- LTI 시스템의 응답

$$y(t) = S\{x(t)\}$$

$$= S\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)S\{\delta(t-\tau)d\tau\}$$

$x(\tau)$는 t에 대해 상수이므로 시스템의 선형 특성으로 이와 같이 표현됨

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

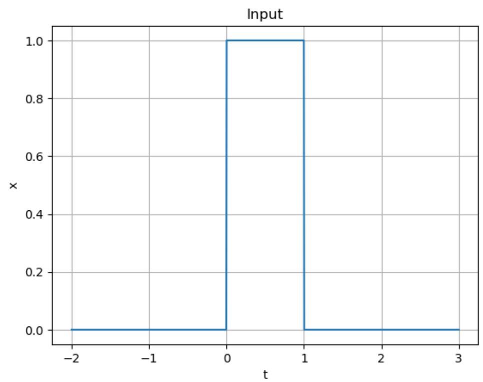
시스템이 시불변이므로 $S\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$가 성립함

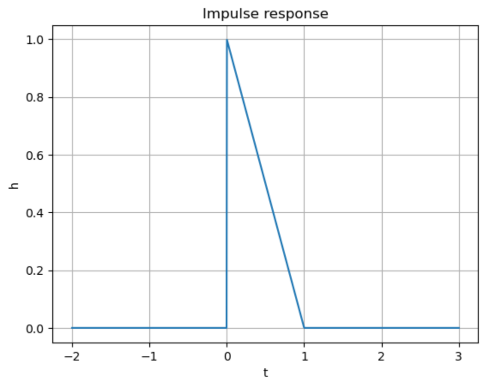
$$= x(t) * h(t)$$

시스템의 출력이 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션임

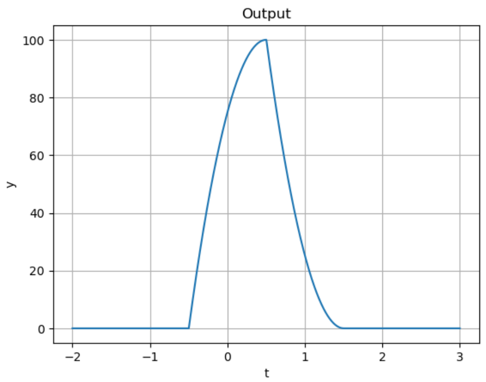
연속 선형 시불변 시스템

- LTI 시스템의 응답



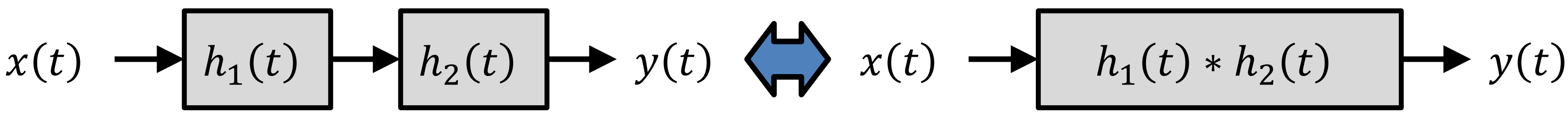


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

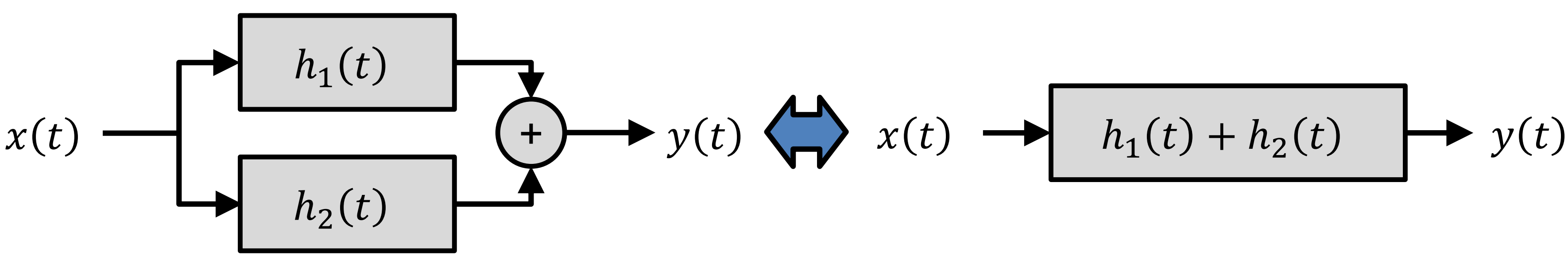


연속 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 교환 법칙 : $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
  - 결합 법칙 : $[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$



  - 분배 법칙 : $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$



연속 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 인과 LTI 시스템

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$\tau > t$에서 $h(t-\tau) = 0$이므로 τ에 대한 적분을 t까지만 하면 됨

$$= \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

연속 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 안정 LTI 시스템

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

$h(\tau)$와 $x(t-\tau)$를 곱하면 음수, 양수의 경우가 모두 발생함. 이 값을 적분하는 값보다 절댓값을 취해서 모두 양수 값을 만들고 적분하는 것이 당연히 금

$$\leq M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

입력이 Bounded 되어 있으므로 유한한 값을 가져야 함

미분 방정식의 표현법

- 연속 시간 시스템을 모델링할 때 많이 사용됨

N차 상계수 미분 방정식의 일반형임

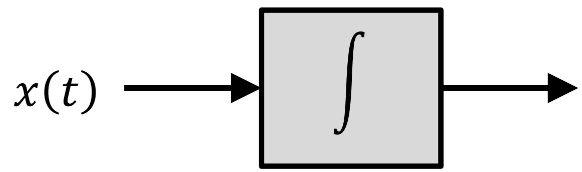
$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

  - N개의 계수 a_i와 $(M+1)$개의 계수 b_k는 실수이며 시스템의 특정에 의해 결정됨
  - 해를 구하기 위해서 다음과 같이 N개의 초기 조건이 필요함

$$y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(N-1)}(t_0)$$

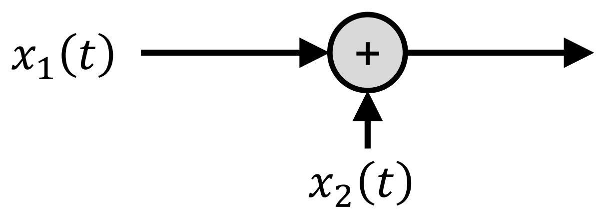
연속 시스템의 구성 요소

적분기



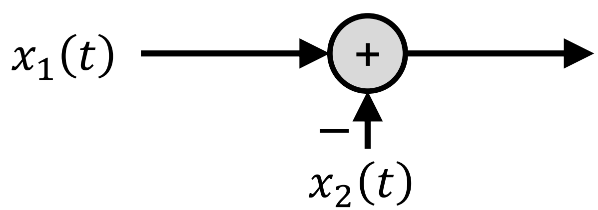
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau$$

가산기



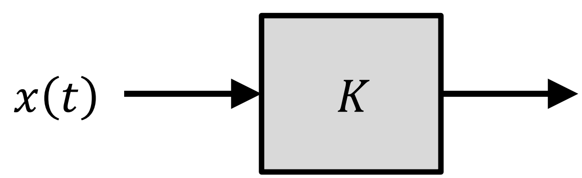
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

감산기



$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

스칼라 승산기



$$y(t) = Kx(t)$$