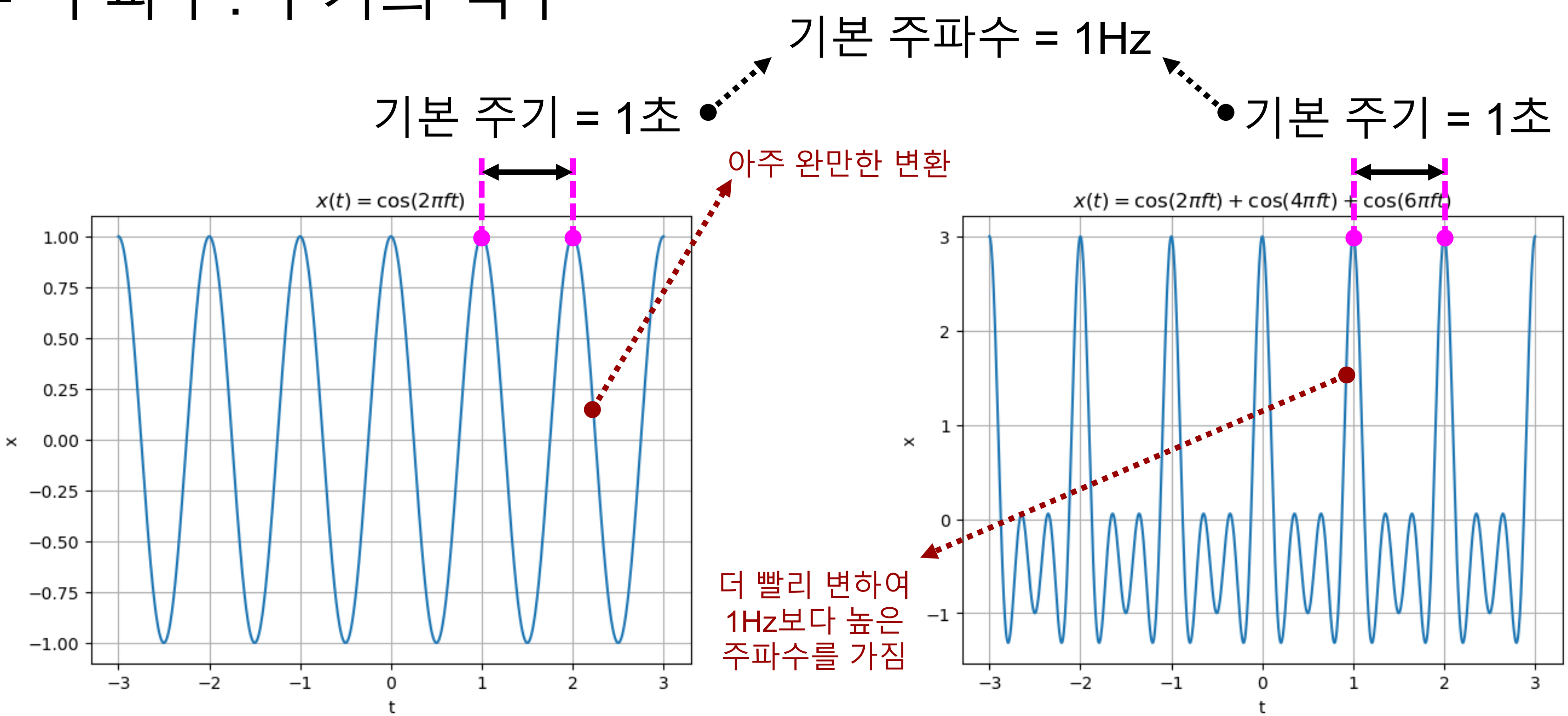
Lecture 05

연속 신호의 주파수 해석

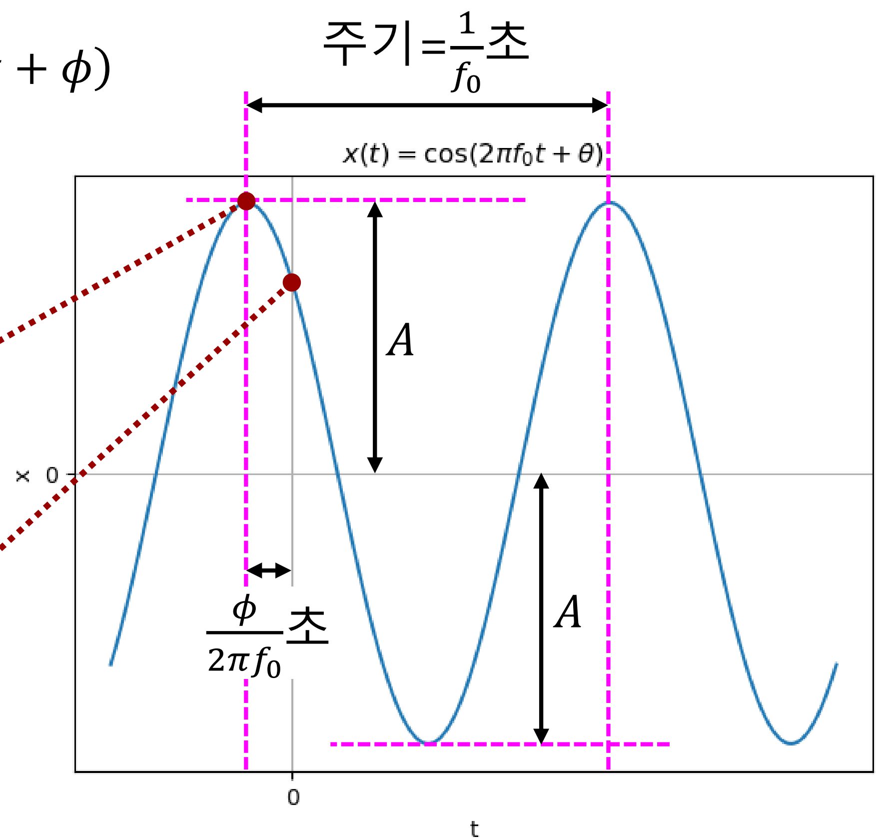
기본 신호

- 주기 : 신호의 동일한 모양이 반복되는 간격
- 주파수: 주기의 역수



기본 신호

- 코사인 신호
  - 정의 : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$
    - A : 진폭
    - f_0 : 주파수
    - ϕ : 위상

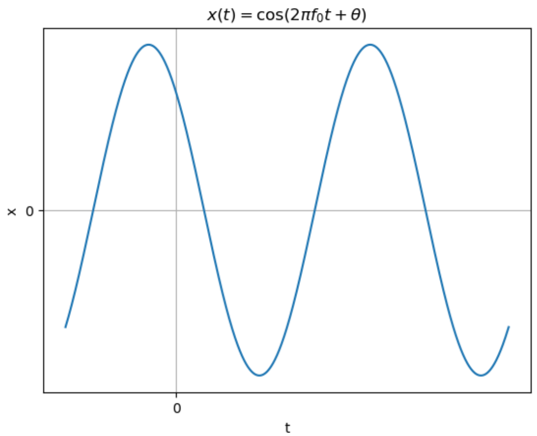


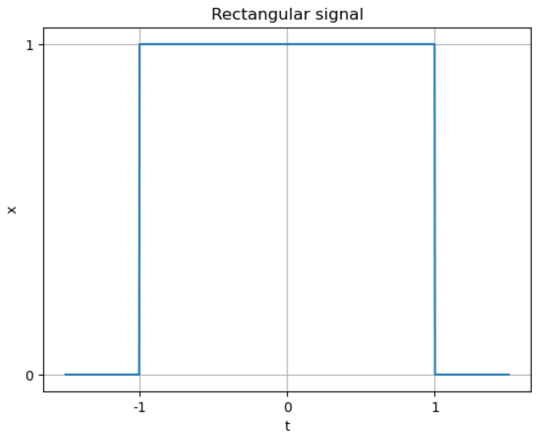
한 주기의 출발점

$t = 0$에서 한 주기의 $\frac{\phi}{2\pi}$가
이미 진행된 상태

기본 신호

- 코사인 신호
  - 그래프 표현하는 법이 효율적이 아님
  - 중요한 정보
    - A : 진폭 → 얼마의 크기
    - f_0 : 주파수 → 얼마나 빨리 반복됨
    - ϕ : 위상 → 원점에서의 어떻게 출발함
- 구형파 신호
  - 그래프 표현하는 법이 효율적임
    - 그래프를 통해 구형파는 시간에 따라 신호 값이 0, 1, 0으로 변하는 과정을 알 수 있음





기본 신호

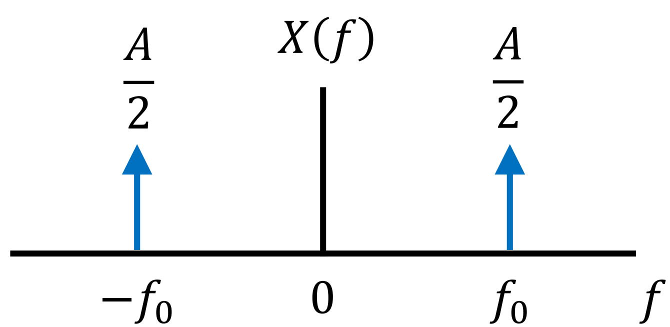
- 코사인 신호의 스펙트럼(**spectrum**)
  - 코사인 신호를 **주파수에 대한 함수**로 표시함

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ 위상 $\phi = 0$

$x(t) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$ 오일러 공식(Euler's identity)

주파수 f_0와 진폭 $\frac{A}{2}$를 가지는 주기 신호 주파수 $-f_0$와 진폭 $\frac{A}{2}$를 가지는 주기 신호

$$X(f) = \begin{cases} \frac{A}{2} & f = f_0 \\ \frac{A}{2} & f = -f_0 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$$



f Hz

$\Omega = 2\pi f$ rad/sec

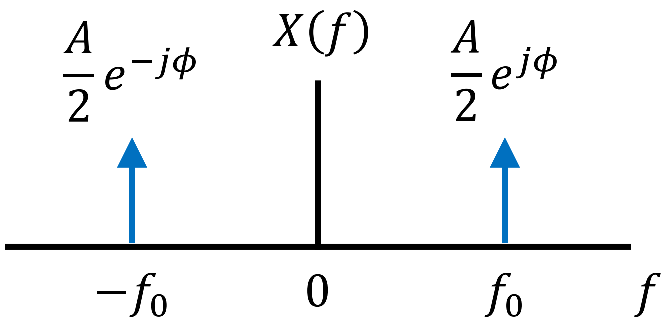
기본 신호

- 코사인 신호의 스펙트럼(**spectrum**)
  - 코사인 신호를 **주파수에 대한 함수**로 표시함

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$ 일반적인 코사인 신호 고려

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}$$ 오일러 공식(Euler's identity)

$$X(f) = \begin{cases} \frac{A}{2}e^{j\phi} & f = f_0 \\ \frac{A}{2}e^{-j\phi} & f = -f_0 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$$



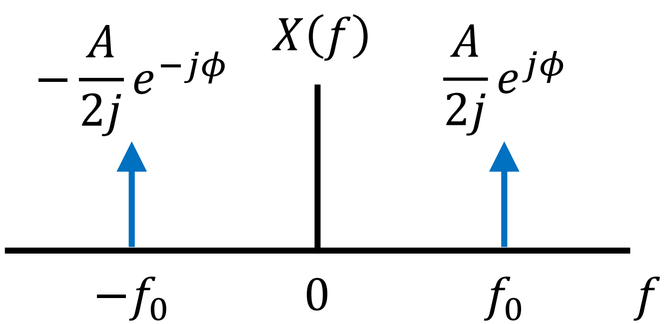
기본 신호

- 사인 신호의 스펙트럼(**spectrum**)
  - 사인 신호를 **주파수에 대한 함수**로 표시함

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$$ 일반적인 사인 신호 고려

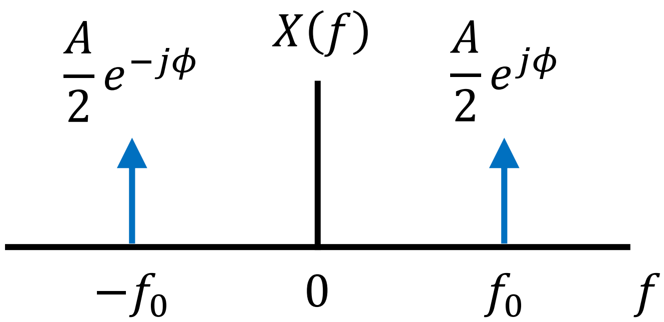
$$x(t) = \frac{A}{2j}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}$$ 오일러 공식(Euler's identity)

$$X(f) = \begin{cases} \frac{A}{2j}e^{j\phi} & f = f_0 \\ -\frac{A}{2j}e^{-j\phi} & f = -f_0 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$$

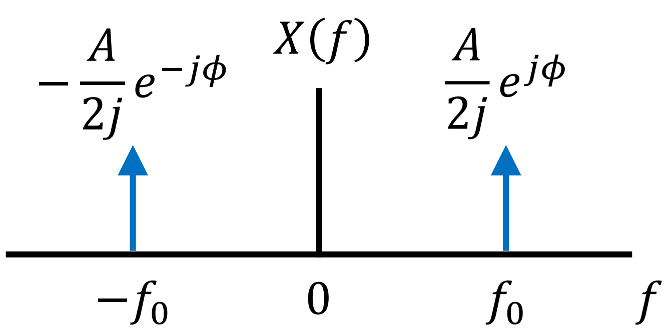


기본 신호

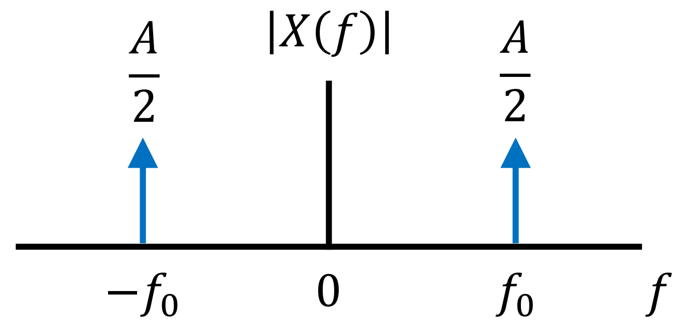
코사인 신호의 스펙트럼



사인 신호의 스펙트럼



코사인 신호와 사인 신호의 스펙트럼의 절댓값



연속 주기 신호의 주파수 해석

- 주파수 합성과 주파수 분해
  - 합성 : 여러 개의 코사인 신호를 모두 더하여 새로운 주기 신호를 만들게 됨
  - 분해 : 주어진 주기 신호를 여러 개의 코사인 신호의 합으로 분해하게 됨

주파수 합성 과정

주파수 정보 (코사인 신호) $\{ f_k, A_k, \phi_k$

합성

주기 신호 $y(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$

주파수 분해 과정

주기 신호 $x(t)$

분해

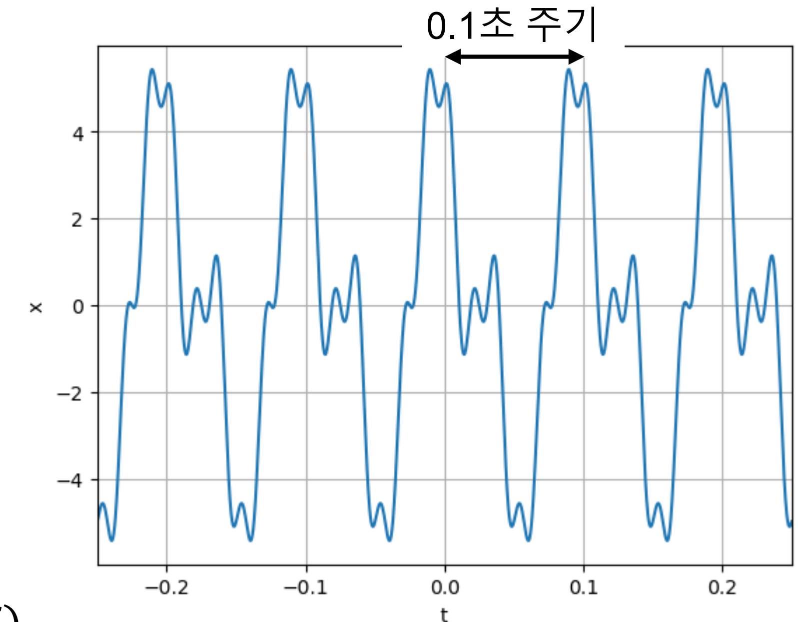
주파수 정보 (코사인 신호) $\{ f_k, A_k, \phi_k$

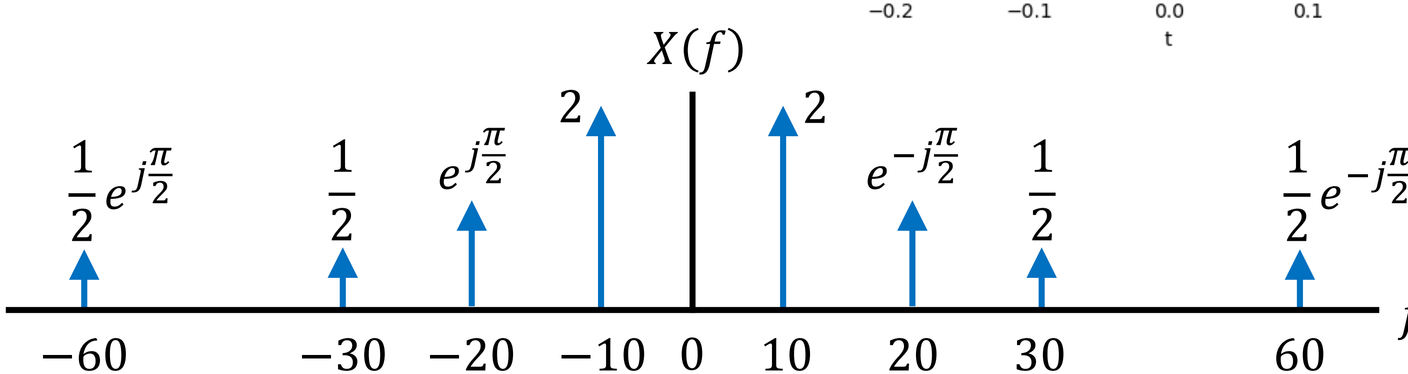
스펙트럼 $X(f)$

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 주파수 합성

k	f_k	A_k	ϕ_k
0	10	4	0
1	20	2	$\pi/2$
2	30	1	0
3	60	1	$-\pi/2$





연속 주기 신호의 주파수 해석

- 주파수 합성
  - 항상 가능

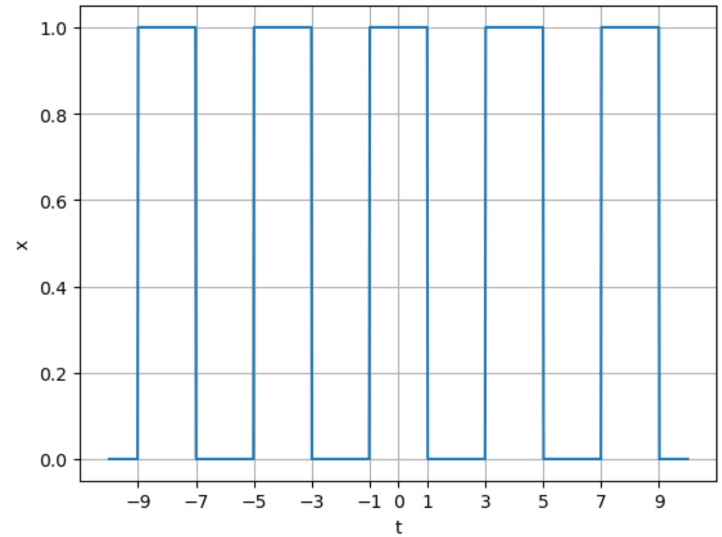
- 주파수 분해
  - 유한한 개수의 코사인 신호로 분해되지 않은 주기 신호가 있음

→ 무한개의 코사인 신호로 분해가 가능함

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t + \phi_k\right)$$



연속 주기 신호의 주파수 해석

- 주파수 합성 ↔ 푸리에 합성(**Fourier synthesis**)
- 주파수 분해 ↔ 푸리에 분석(**Fourier analysis**)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

$$\boxed{= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t + \phi_k\right)}$$

f_0 기본 주파수

$\frac{1}{f_0}$ 기본 주기

연속 시간 푸리에 급수(**CTFS**: Continuous-Time Fourier Series)

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 일반적인 주기 신호 : **실수** 주기와 **복수** 주기를 포함함

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

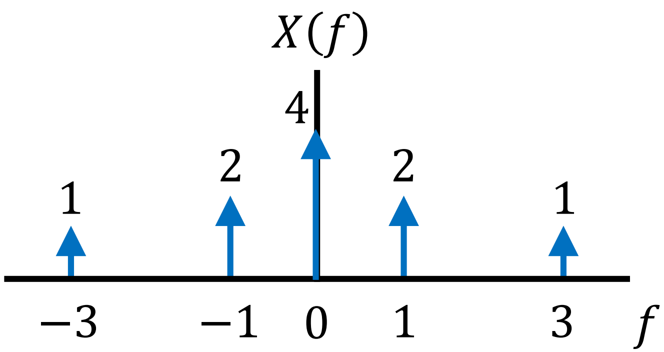
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

  - X_k를 $x(t)$의 **연속 시간 푸리에 급수 계수**라 함

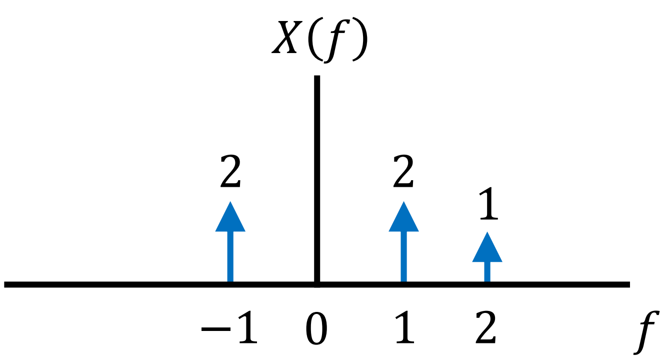
$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예, 기본 주파수 $f_0 = 10\text{Hz}$



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= X_0 + X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_{-1} e^{j2\pi f_0 t} \\
&+ X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_{-3} e^{j2\pi 3 f_0 t} \\
&= 4 + 2e^{j2\pi 10t} + 2e^{-j2\pi 10t} + e^{j2\pi 30t} \\
&+ e^{-j2\pi 30t} \\
&= 4 + 4\cos(2\pi 10t) + 2\cos(2\pi 30t)
\end{aligned}
$$

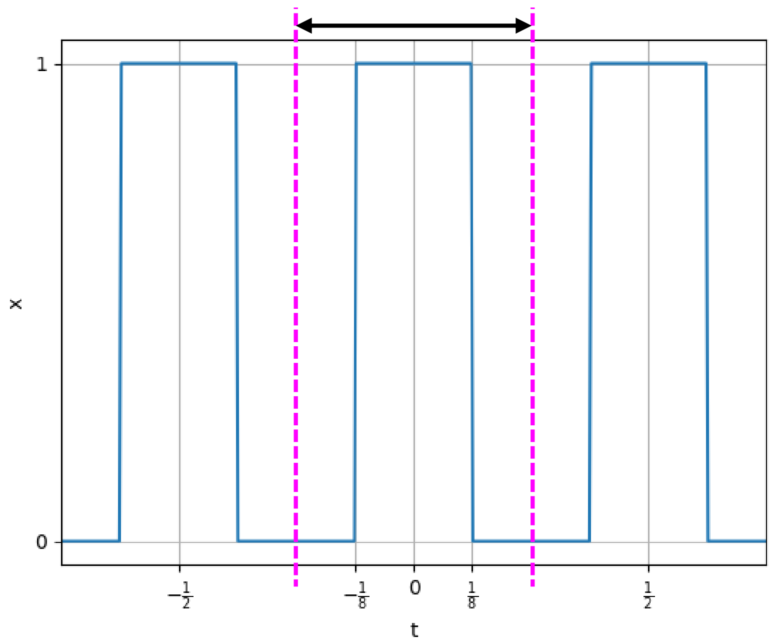


$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_{-1} e^{j2\pi f_0 t} + X_2 e^{j2\pi 2 f_0 t} \\
&= 2e^{j2\pi 10t} + 2e^{-j2\pi 10t} + e^{j2\pi 20t} \\
&= 4\cos(2\pi 10t) + e^{j2\pi 20t}
\end{aligned}
$$

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예

기본 주기 $T = 0.5$초 $\rightarrow f_0 = 2$Hz



$x(t)$의 **연속 시간 푸리에 급수 계수**

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= 2\int_{-0.25}^{0.25} x(t)e^{-j2\pi k2t}dt$$

$$= 2\int_{-0.25}^{0.25} e^{-j2\pi k2t}dt$$

$$= 2\frac{1}{-j2\pi k2}e^{-j2\pi k2t}\Big|_{-0.25}^{0.25} \text{ if } k \neq 0$$

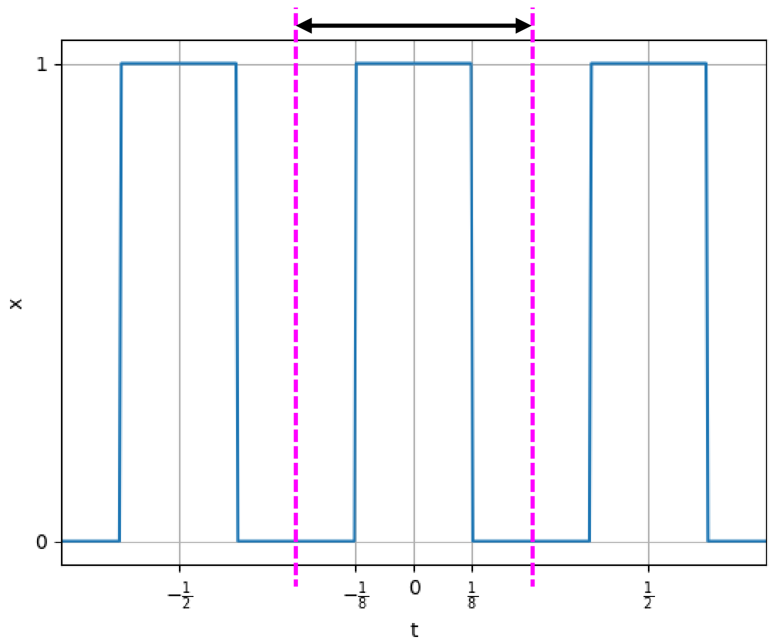
$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} \text{ if } k \neq 0$$

If $k = 0 \rightarrow X_0 = 2\int_{-0.25}^{0.25} dt = 0.5$

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예

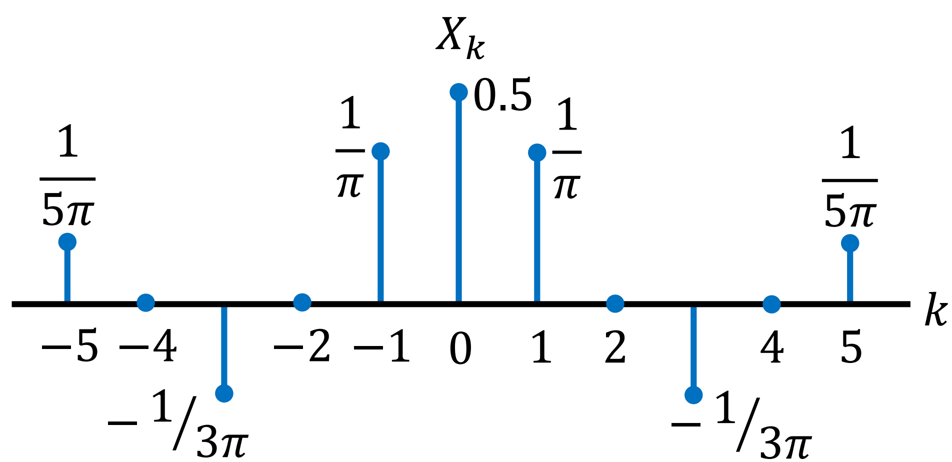
기본 주기 $T = 0.5$초 $\rightarrow f_0 = 2\text{Hz}$



$x(t)$의 **연속 시간 푸리에 급수 계수**

$$X_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} \text{ if } k \neq 0$$

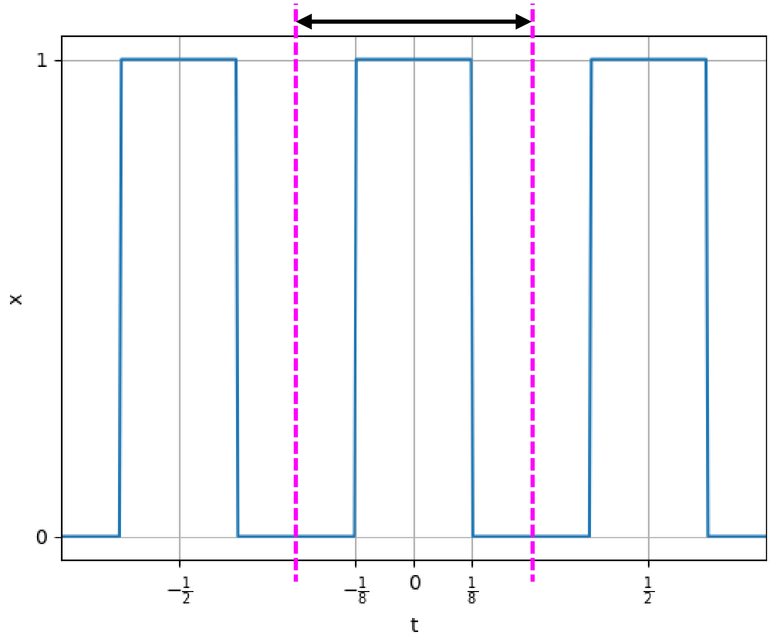
$$\text{If } k = 0 \rightarrow X_0 = 2\int_{-0.25}^{0.25} dt = 0.5$$

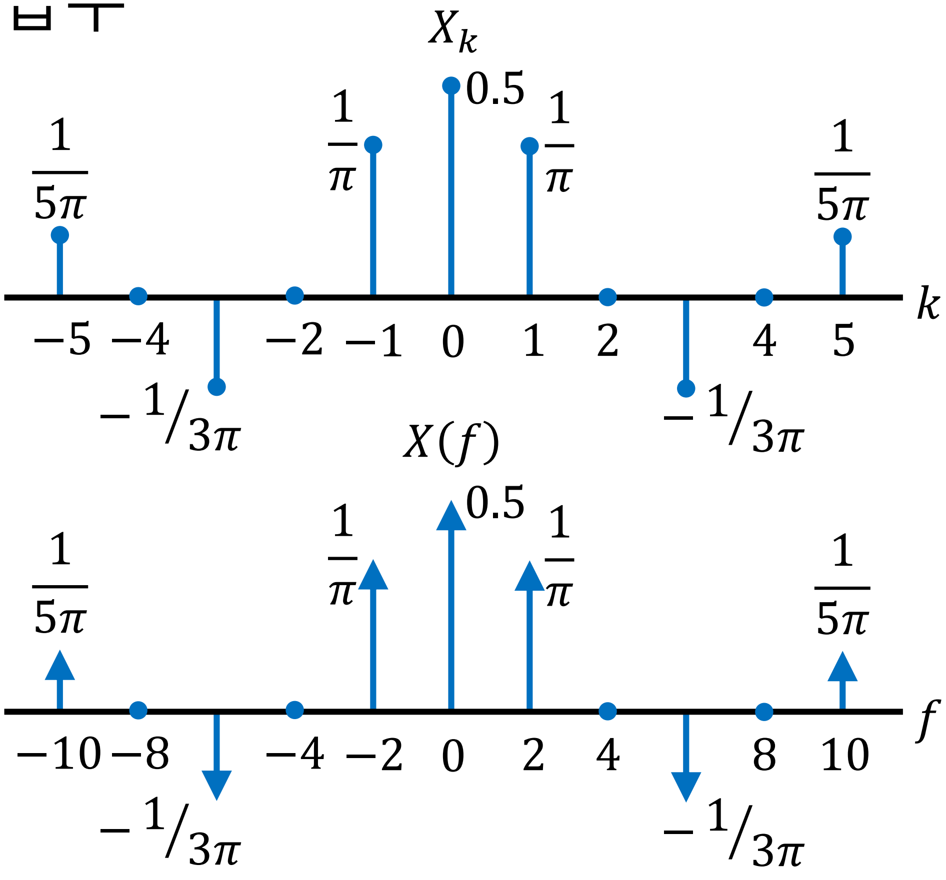


연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예

기본 주기 $T = 0.5$초 $\rightarrow f_0 = 2$Hz





연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예, 푸리에 합성 과정을 살펴보자

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$k = 0,\ k > 0,\ k < 0$ 구간으로 구분하여 전개

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k 2t} + \sum_{k=\infty}^{1} X_{-k} e^{-j2\pi k 2t}$$

마지막 항에서 k를 $-k$ 치환

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k 2t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k 2t}$$

마지막 항에 $X_k = X_{-k}$ 성질 적용

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_k e^{j2\pi k 2t} + X_k e^{-j2\pi k 2t} \right)$$

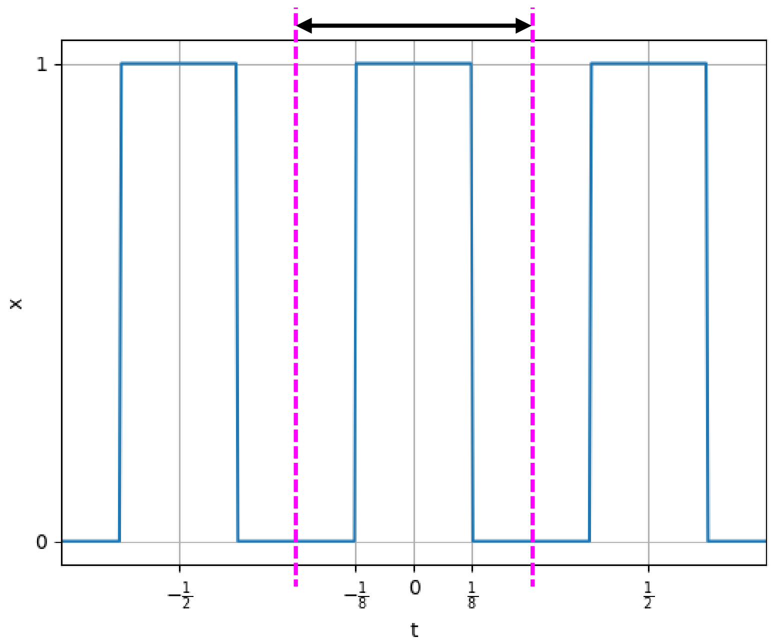
$$= \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi 2kt)$$

하나의 합으로 묶고 코사인으로 정리

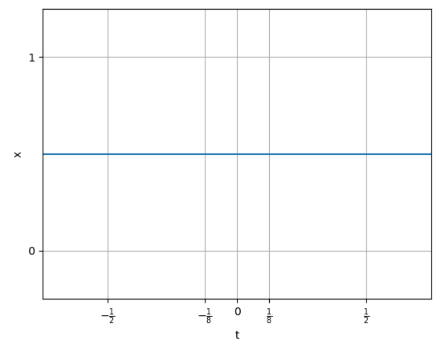
연속 주기 신호의 주파수 해석

- 일반적인 연속 시간 푸리에 급수
  - 예

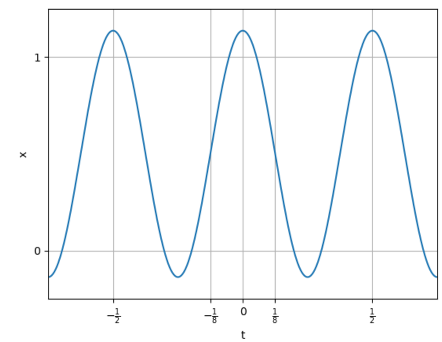
기본 주기 $T = 0.5$초 $\rightarrow f_0 = 2\text{Hz}$



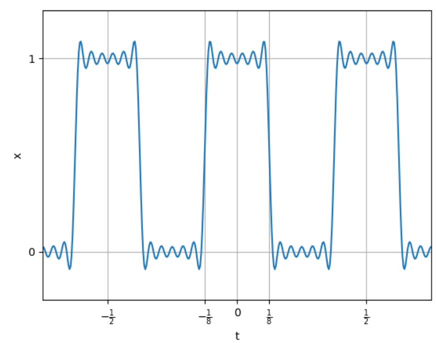
0Hz까지 합성



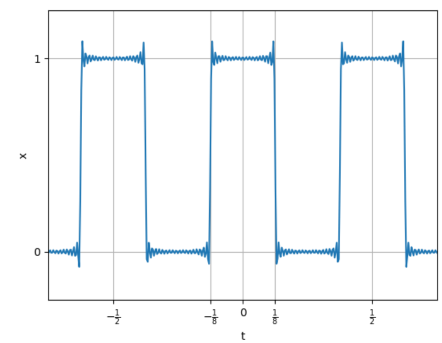
2Hz까지 합성



26Hz까지 합성



78Hz까지 합성



연속 주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 급수의 성질
  - X_k와 X_{-k}의 관계 : $x(t)$가 실수이면 이는 항상 코사인 신호의 합으로 분해됨

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_k}{2} e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \right)$$

$$X_k = \frac{A_k}{2} e^{j\phi_k}$$

$$X_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\phi_k}$$

$\Downarrow$

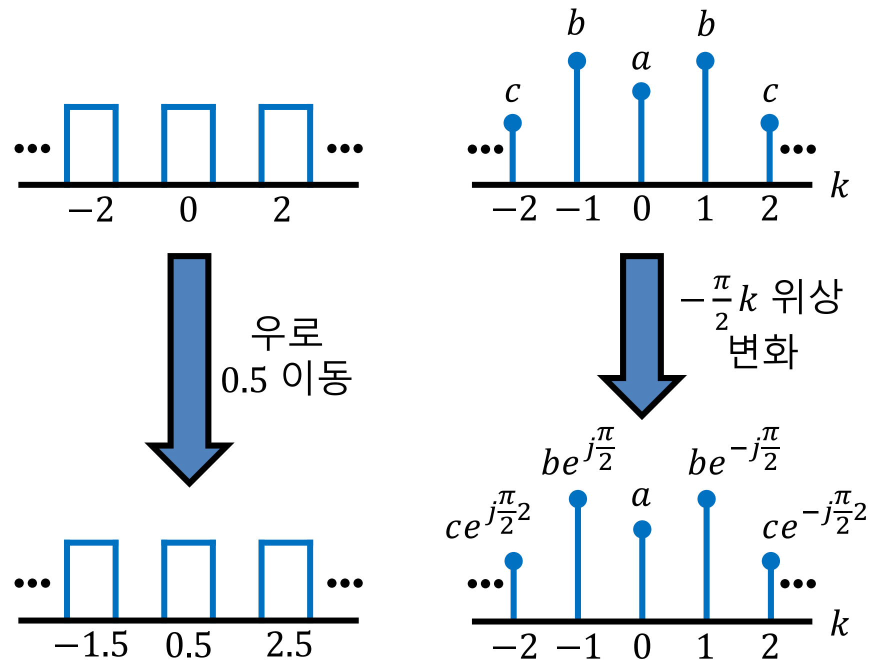
$X_k = X_{-k}^*$성질을 가짐

$X_k = X_{-k}^*$관계를 만족하면 $x(t)$는 반드시 실수 주기 신호임

연속 주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 급수의 성질
  - $x(t)$의 시간 이동 성질 : 신호를 신간 축에서 이동시키면
    - 진폭 및 주파수 성질은 변하지 않음
    - 위상 정보는 변하게 됨

신호	연속 시간 푸리에 급수 계수
$x(t)$	X_k
$x(t-\tau)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau} \rightarrow -2\pi k f_0 \tau$ 위상 변화
$x(t+\tau)$	$X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \rightarrow 2\pi k f_0 \tau$ 위상 변화



연속 주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 급수의 성질
  - Parseval 정리 :

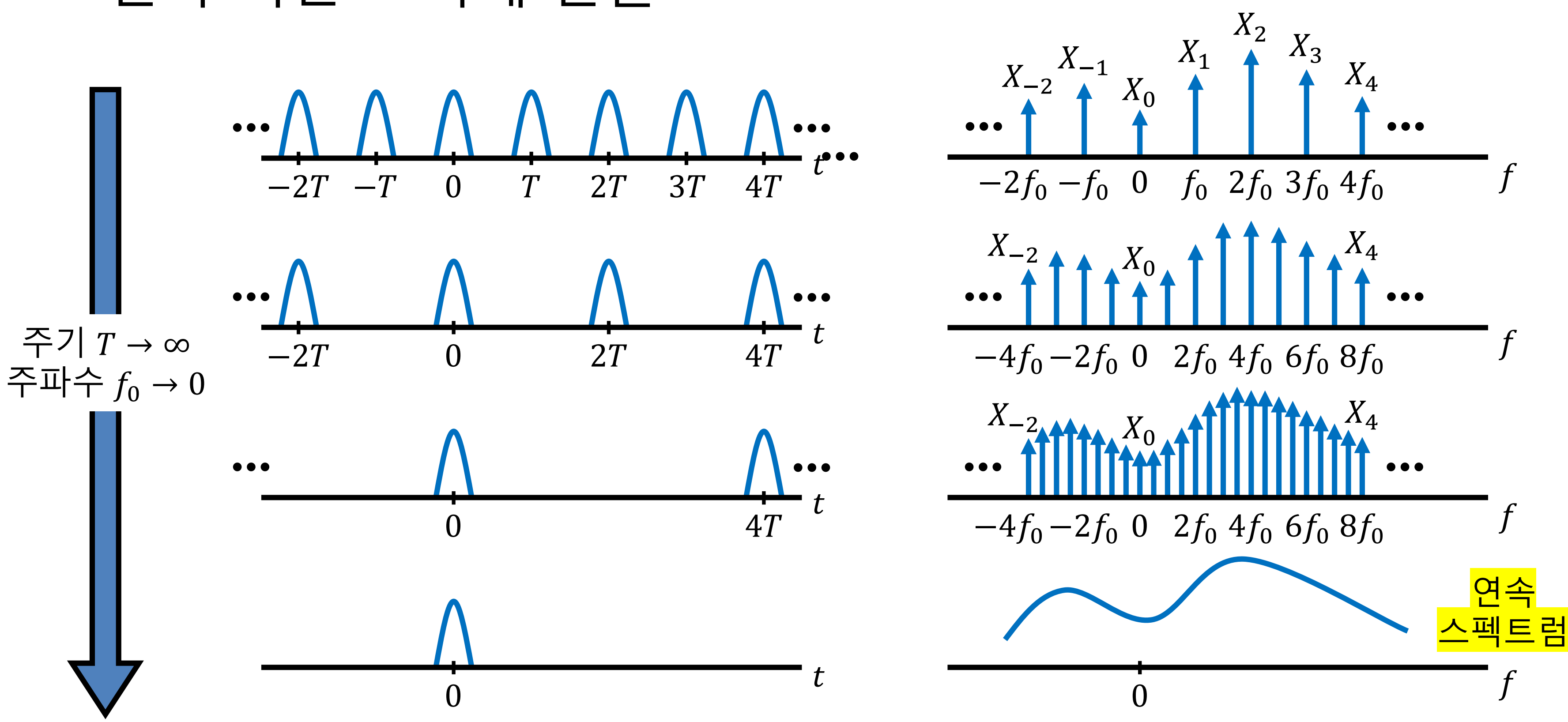
$$\frac{1}{T}\int_{<T>}|x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2$$

시간 축에서 구하는 신호의 전력(power)

스펙트럼에서 구하는 신호의 전력(power)

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 변환



연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 변환
  - 비주기 신호는 주기가 무한대인 특별한 경우의 주기 신호로 생각할 수 있음
  - 비주기 신호의 스펙트럼은 연속된 형태의 스펙트럼임

주기 신호 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

비주기 신호 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$ → 연속 시간 푸리에 역변환(**ICTFT**: Inverse Continuous-Time Fourier Transform)

- 비주기 신호 $x(t)$로부터 $X(f)$를 구하는 식

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ → 연속 시간 푸리에 변환(**CTFT**: Continuous-Time Fourier Transform)

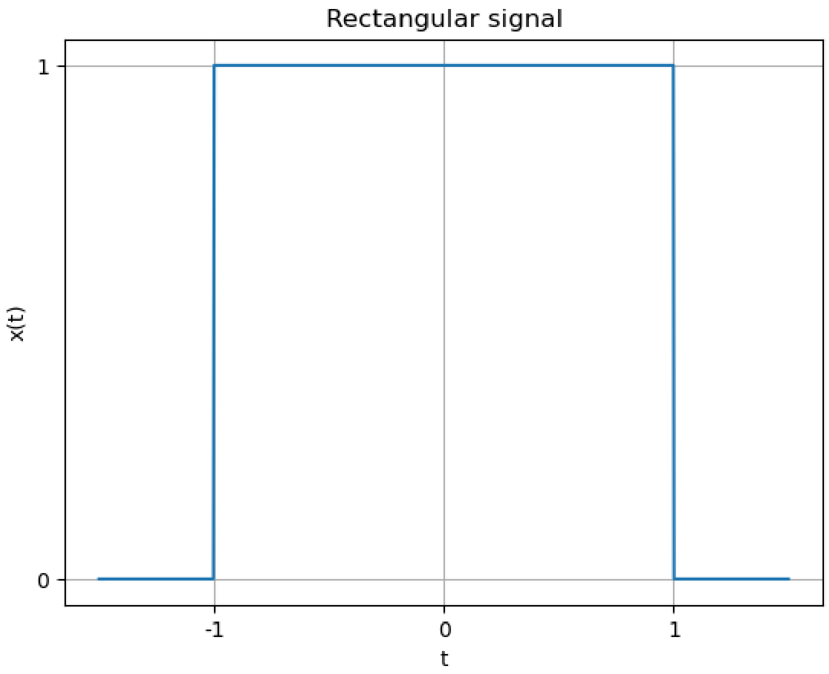
연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 변환
  - 정리

$x(t) \Rightarrow X(f)$	연속 시간 푸리에 변환
$x(t) \Leftarrow X(f)$	연속 시간 푸리에 역변환
$x(t) \Leftrightarrow X(f)$	상호 변환을 강조
$F\{x(t)\} = X(f)$	$x(t)$의 연속 시간 프리에 변환

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 변환
  - 예, $x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-1}^{1} \text{ if } f \neq 0$$

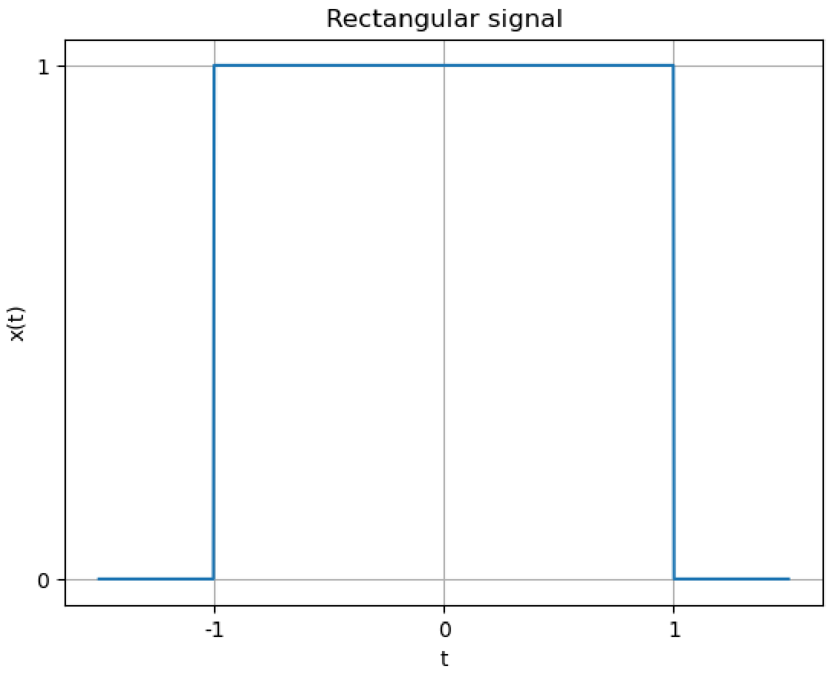
$$= \frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} \text{ if } f \neq 0$$

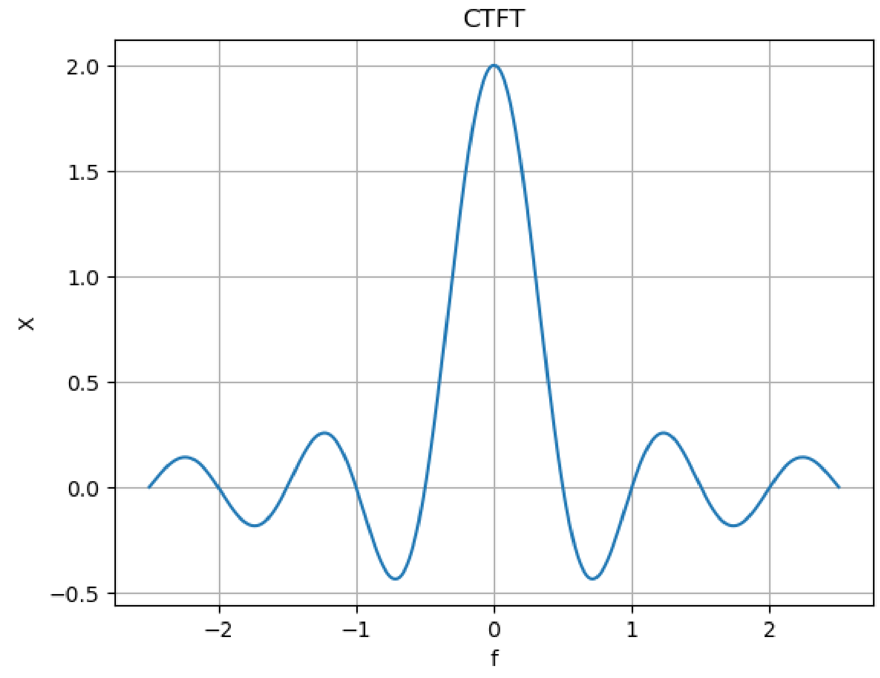
$$= \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} \text{ if } f \neq 0$$

$$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 2$$

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 프리에 변환
  - 예, $x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$





연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 주요 연속 시간 푸리에 변환 관계

신호 $x(t)$	연속 시간 푸리에 변환 $X(f)$
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$a\delta(t)$	a
$e^{j2\pi at}$	$\delta(f-a)$
$Ae^{j2\pi at}$	$A\delta(f-a)$

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 시간 이동 :

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$x(t-\tau) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau} \rightarrow -2\pi f\tau \text{ 위상 변환}$$

$$x(t+\tau) \Leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f\tau} \rightarrow 2\pi f\tau \text{ 위상 변환}$$

    - 예,

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau}$$

$$e^{j2\pi at} \Leftrightarrow \delta(f-a)$$

$$e^{j2\pi a(t-\tau)} \Leftrightarrow \delta(f-a)e^{j2\pi f\tau} = \delta(f-a)e^{j2\pi a\tau}$$

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 주파수 이동 :

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$x(t)e^{j2\pi at} \Leftrightarrow X(f-a)$$

$$x(t)e^{-j2\pi at} \Leftrightarrow X(f+a)$$

    - 예,

$$1 \Leftrightarrow \delta(f)$$

$$e^{j2\pi at} \Leftrightarrow \delta(f-a)$$

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 시간/주파수 척도 조절 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{\frac{-\infty}{a}}^{\frac{\infty}{a}} x(t)e^{-j2\pi f\frac{t}{a}}\frac{dt}{a}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f\frac{t}{a}}dt & a > 0 \\ \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(t)e^{-j2\pi f\frac{t}{a}}dt & a < 0 \end{cases}$$

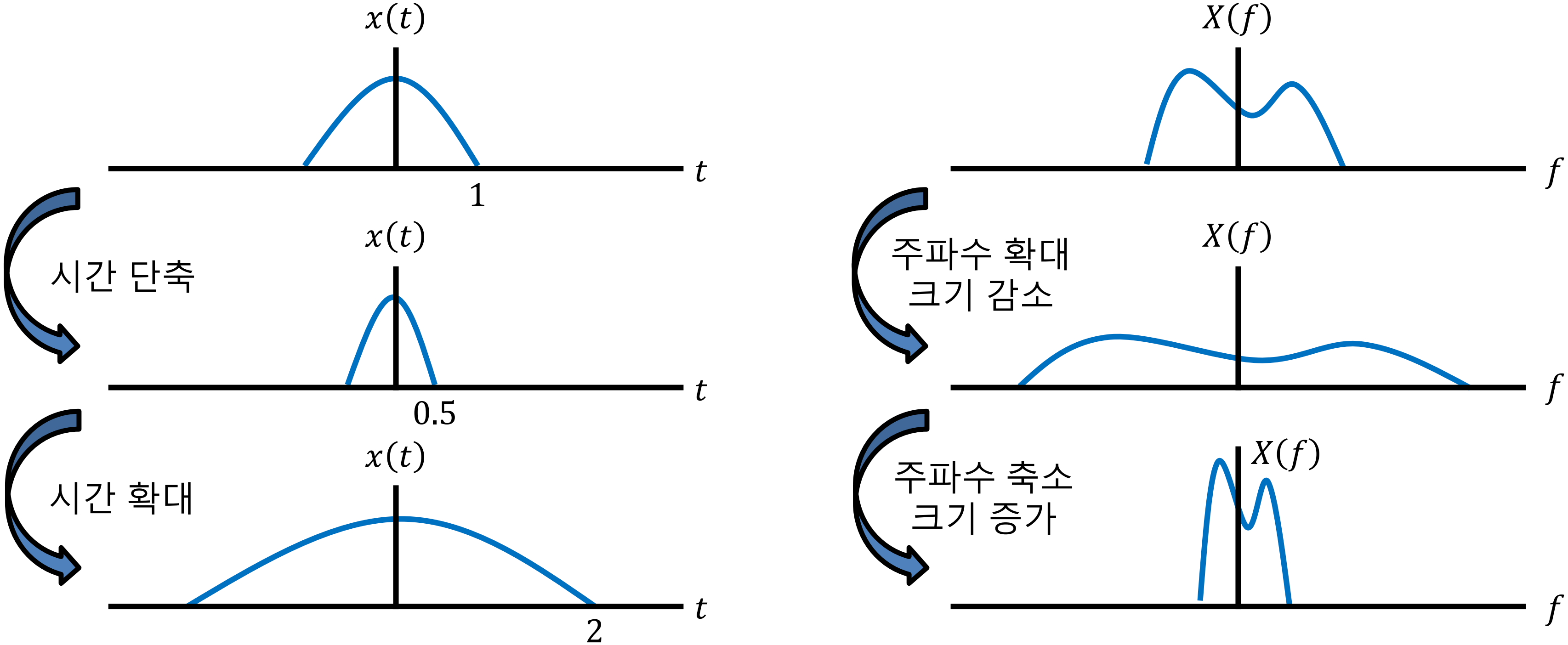
$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f\frac{t}{a}}dt & a > 0 \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f\frac{t}{a}}dt & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 시간/주파수 척도 조절 :



연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - Parseval 정리 : 비주기 신호에 대하여 $x(t)$의 에저지와 $X(f)$의 에너지는 동일함

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

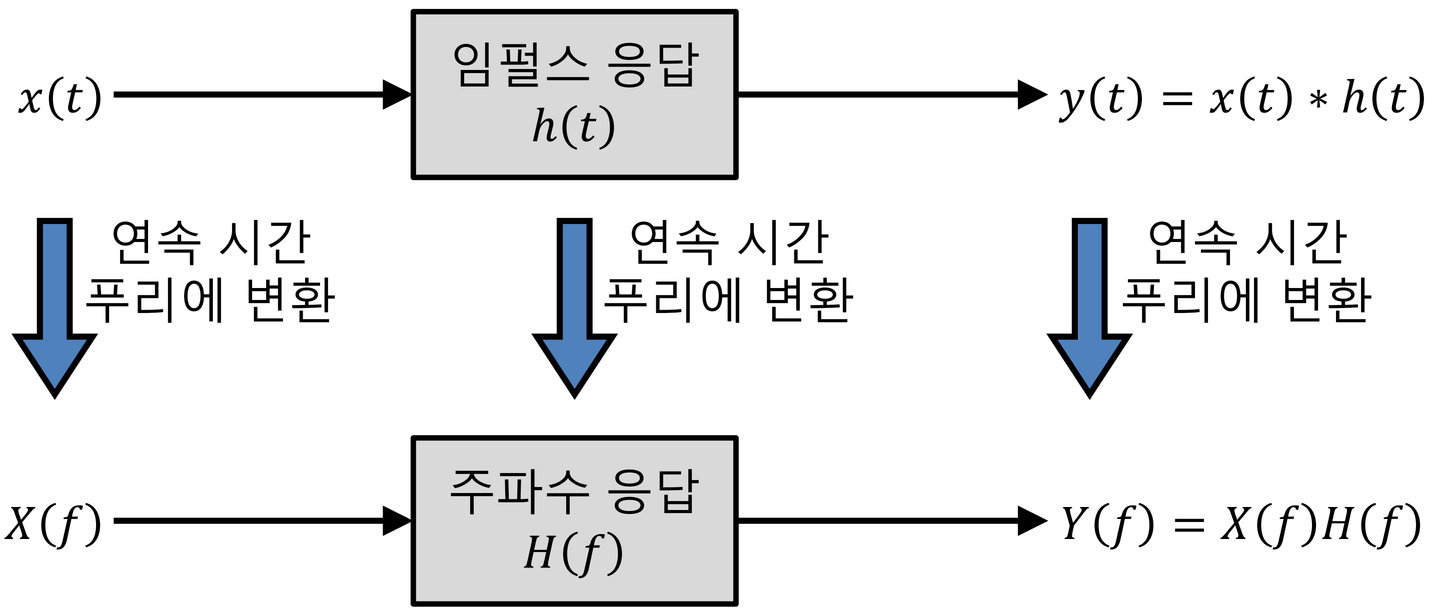
  - 컨벌루션과 곱 연산 :

$$x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) * Y(f)$$

$$x(t) * y(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f)Y(f)$$

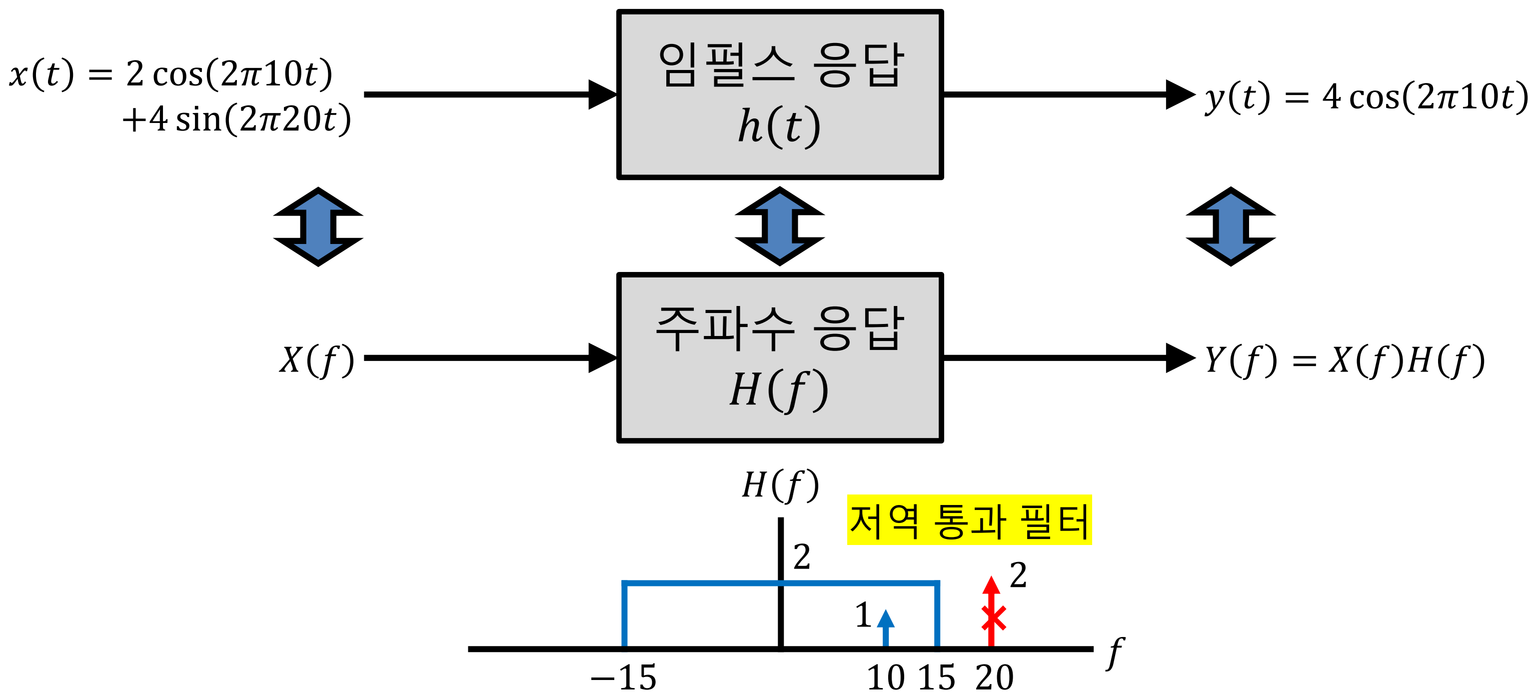
연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 컨벌루션과 곱 연산 :



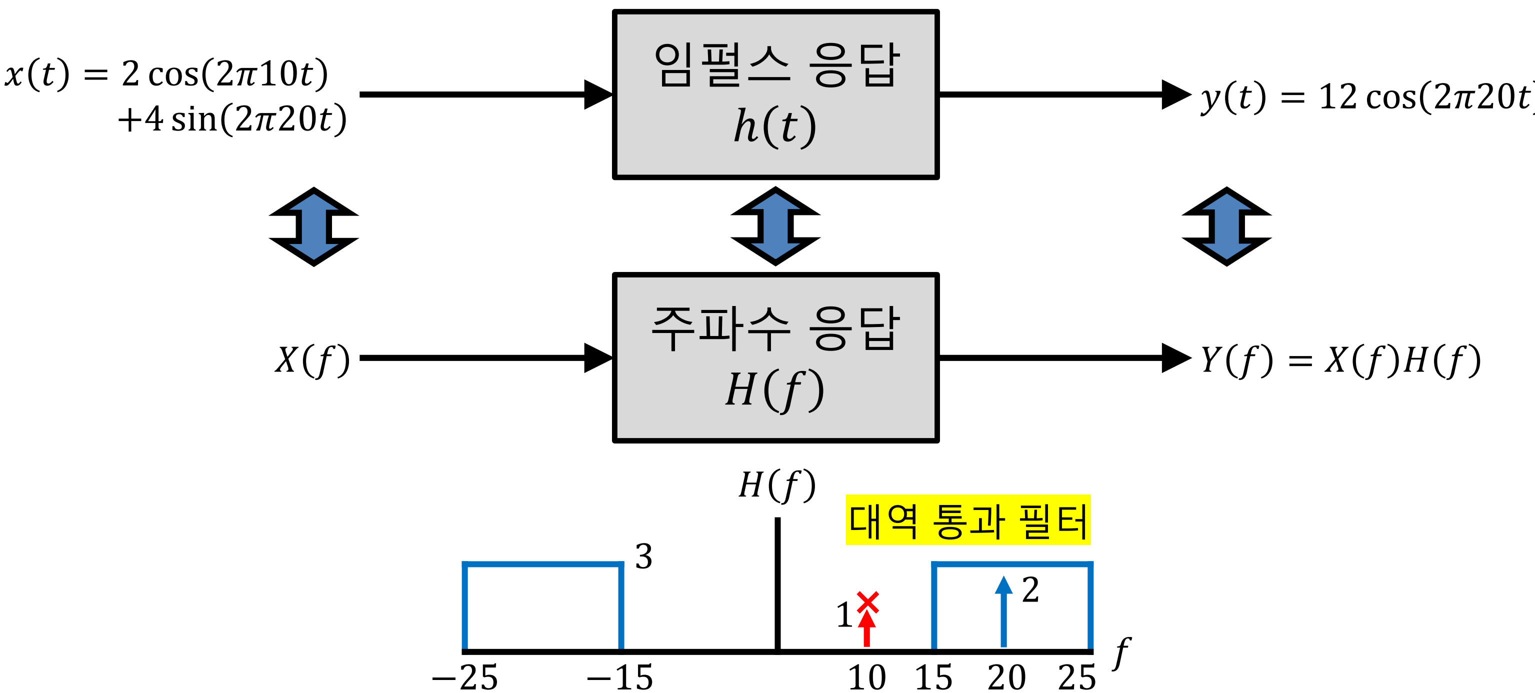
연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 컨벌루션과 곱 연산 :



연속 비주기 신호의 주파수 해석

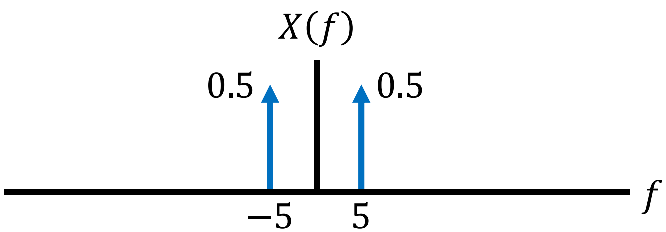
- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 컨벌루션과 곱 연산 :



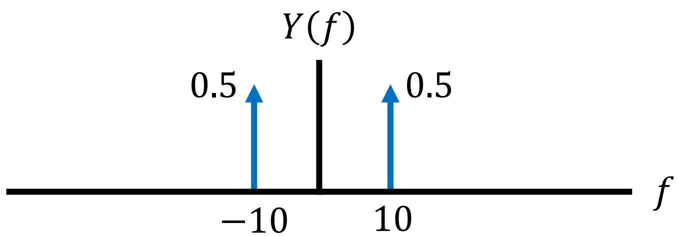
연속 비주기 신호의 주파수 해석

- 연속 시간 푸리에 변환 성질
  - 컨벌루션과 곱 연산 :

$x(t) = \cos(2\pi 5t)$

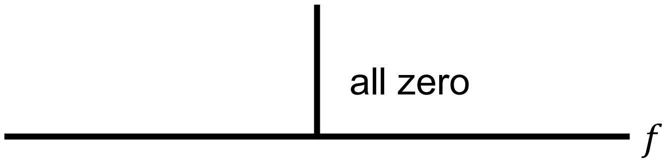


$y(t) = \cos(2\pi 10t)$



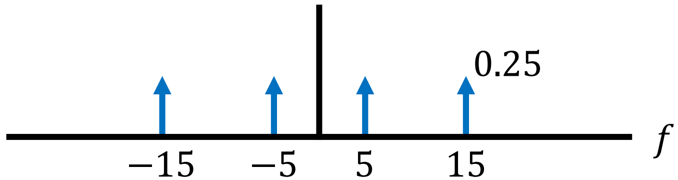
$z(t) = 0$

$Z(f) = X(f)Y(f)$



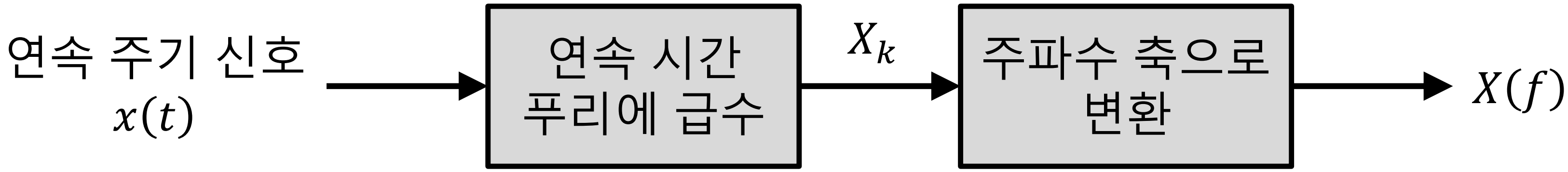
$g(t) = 0.5\cos(2\pi 5t) + 0.5\cos(2\pi 15t)$

$G(f) = X(f) * Y(f)$

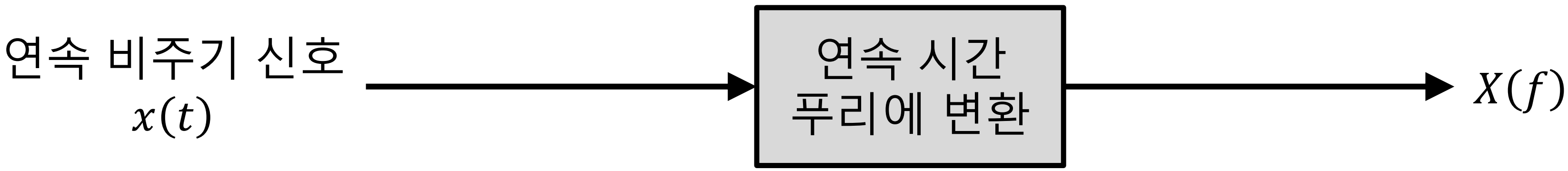


연속 신호의 통합적 주파수 해석

- 배웠던 스펙트럼을 구하는 방법
  - 연속 주기 신호의 경우



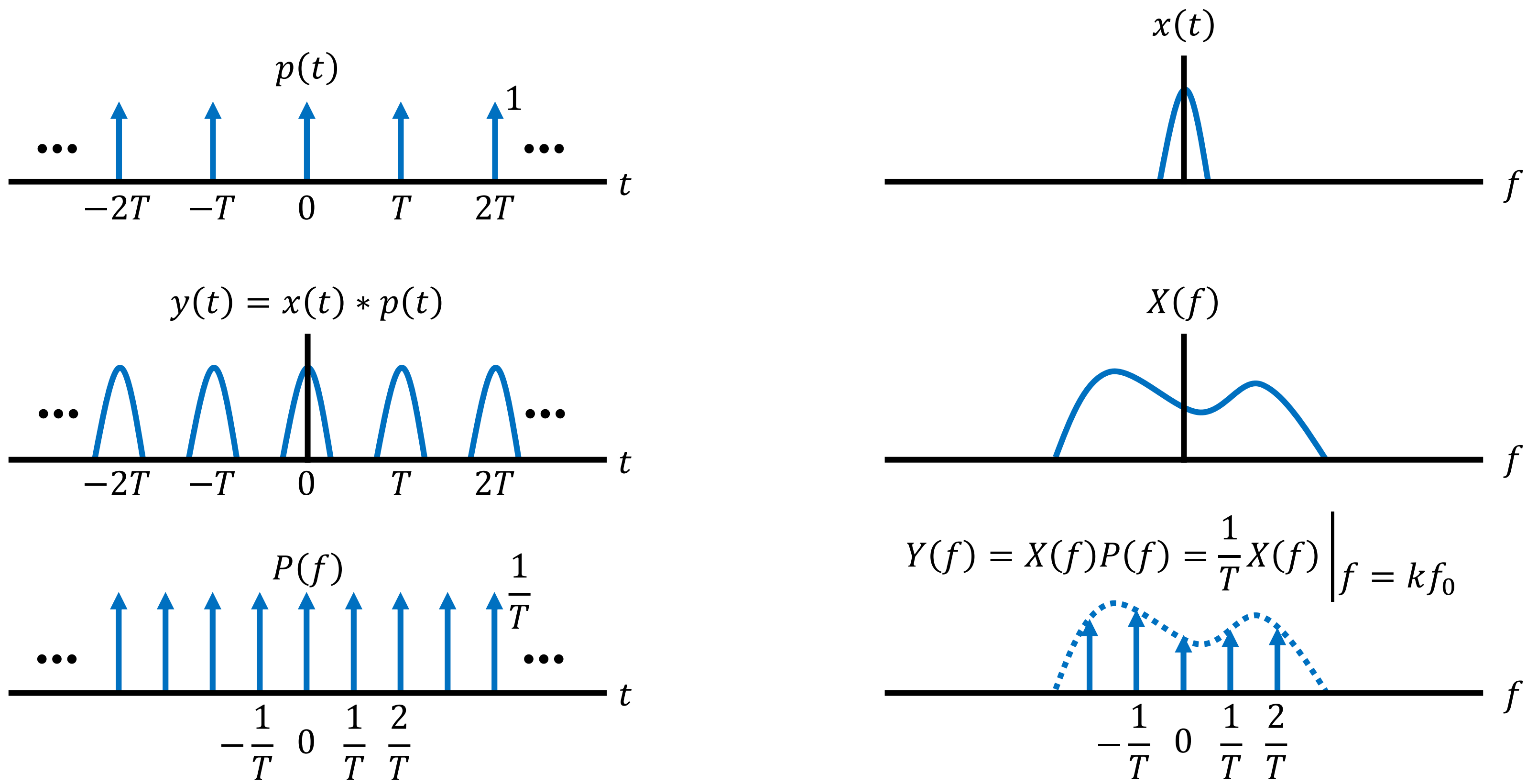
  - 연속 비주기 신호의 경우



→ 통합적 방법으로 모든 연속 신호의 주파수를 해석하는 방법이 필요함

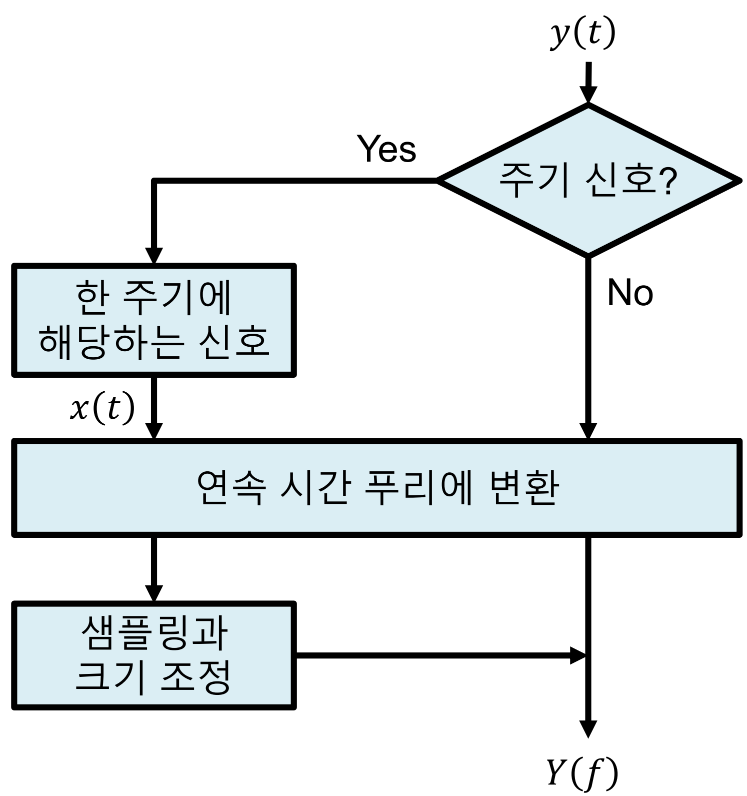
연속 신호의 통합적 주파수 해석

- 연속 주기 신호의 스펙트럼을 구하는 과정



연속 신호의 통합적 주파수 해석

- 스펙트럼을 구하는 통합적 방법
  - 연속 시간 신호 $y(t)$가 주기 신호인지?
    - 주기 신호이면
      - 한 주기에 해당하는 비주기 신호 $x(t)$를 구함
      - 연속 시간 푸리에 변환을 통해 스펙트럼 $X(f)$를 구함
      - $X(f)$를 기본 주파수 f_0 간격으로 샘플링하고 전체적으로 f_0를 곱하면 $Y(f)$가 됨
    - 비주기 신호이면
      - 연속 시간 푸리에 변환을 통해 스펙트럼 $Y(f)$를 구함



연속 신호의 통합적 주파수 해석

- 시간 축과 주파수 축에서 **반복**과 **샘플링**의 관계

시간 축에서의 반복은
주파수 축에서의 샘플링에 해당함

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "T\text{마다 반복}"] \arrow[d, "\text{연속 시간 푸리에 변환}"'] & y(t) \arrow[d, "\text{연속 시간 푸리에 변환}"] \\
X(f) & Y(f) \arrow[l, "f_0 = \frac{1}{T}\text{마다 샘플링}"']
\end{tikzcd}
$$

시간 축에서의 샘플링은
주파수 축에서의 반복에 해당함

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "T\text{마다 샘플링}"] \arrow[d] & g(t) \arrow[d, "\text{연속 시간 푸리에 변환}"] \\
X(f) & G(f) \arrow[l, "f_0 = \frac{1}{T}\text{마다 반복}"']
\end{tikzcd}
$$