

Lecture 06

이산 신호의 주파수 해석

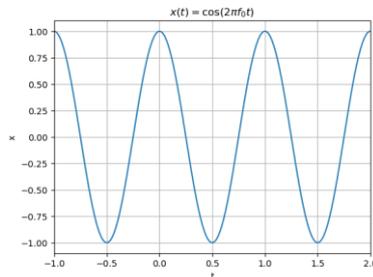
이산 주파수 개념

이산 코사인 신호

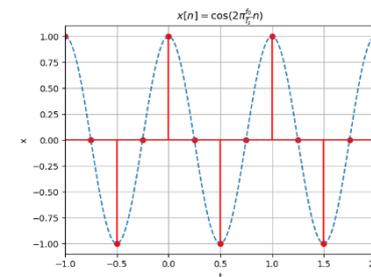
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x[n] = \cos[2\pi f_0 T_s n] = \cos\left[2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right]$$

1Hz 연속
코사인 신호

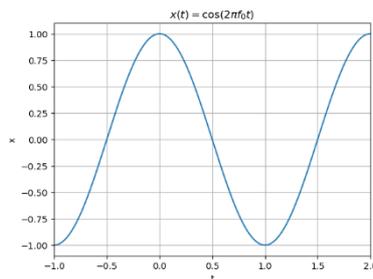


4Hz로 샘플링

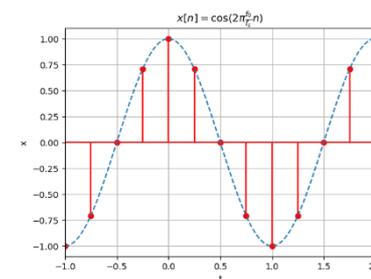


4 샘플마다
신호가 반복됨

0.5Hz 연속
코사인 신호



4Hz로 샘플링



8 샘플마다
신호가 반복됨

이산 주파수 개념

- 이산 코사인 신호의 주파수

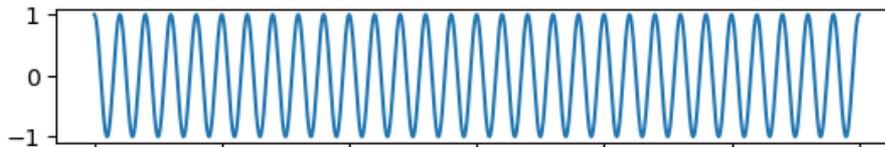
- 정의 : $\hat{f} = \frac{f_0}{f_s}$
- $f_s = \frac{1}{T_s}$: 샘플링 주파수
- \hat{f} 는 연속 신호의 주파수 f_0 과 완전히 다른 물리적 의미를 가짐

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) = \cos(2\pi 5t) & & x(t) = \cos(2\pi 1t) \\
 \downarrow & \text{4Hz로 샘플링} & \downarrow \\
 x[n] = \cos\left[2\pi \frac{5}{4}n\right] & & x[n] = \cos\left[2\pi \frac{1}{4}n\right]
 \end{array}$$

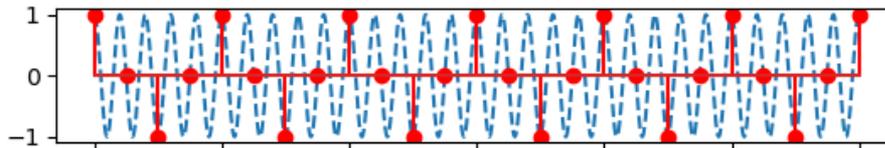
$$\begin{aligned}
 \cos\left[2\pi \frac{5}{4}n\right] &= \frac{1}{2}e^{j2\pi \frac{5}{4}n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi \frac{5}{4}n} \\
 &= \frac{1}{2}e^{j2\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)n} \\
 &= \frac{1}{2}e^{j2\pi \frac{1}{4}n} e^{j2\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi \frac{1}{4}n} e^{-j2\pi n} \\
 &= \frac{1}{2}e^{j2\pi \frac{1}{4}n} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi \frac{1}{4}n} \\
 &= \cos\left[2\pi \frac{1}{4}n\right]
 \end{aligned}$$

이산 주파수 개념

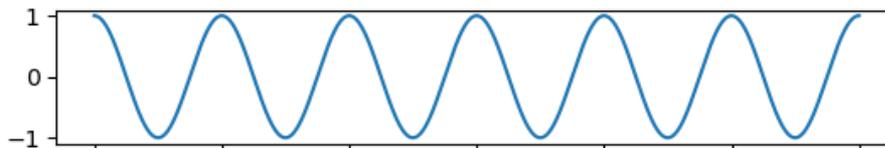
- 이산 코사인 신호의 주파수
 - 두 이산 코사인 신호의 주파수의 차이가 정수이면 두 주파수는 동일한 주파수임



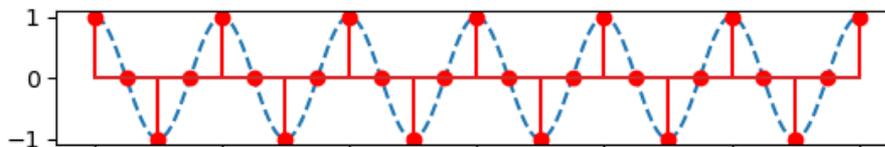
$$x(t) = \cos(2\pi 5t)$$



$$x[n] = \cos\left[2\pi \frac{5}{4}n\right]$$



$$x(t) = \cos(2\pi 1t)$$

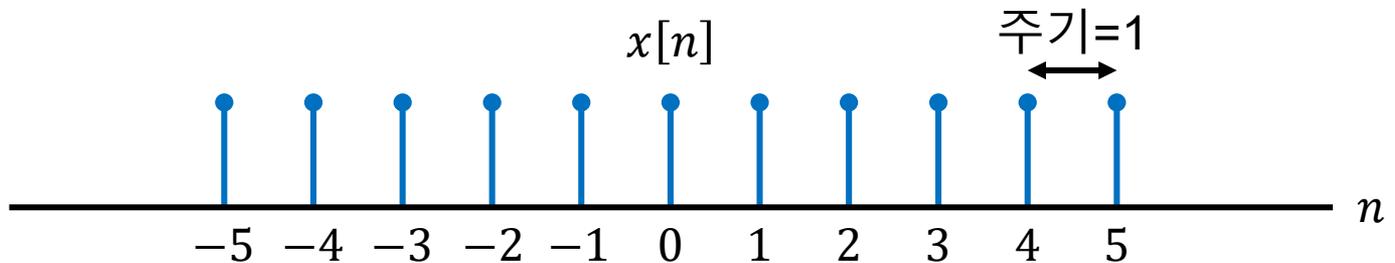


$$x[n] = \cos\left[2\pi \frac{1}{4}n\right]$$

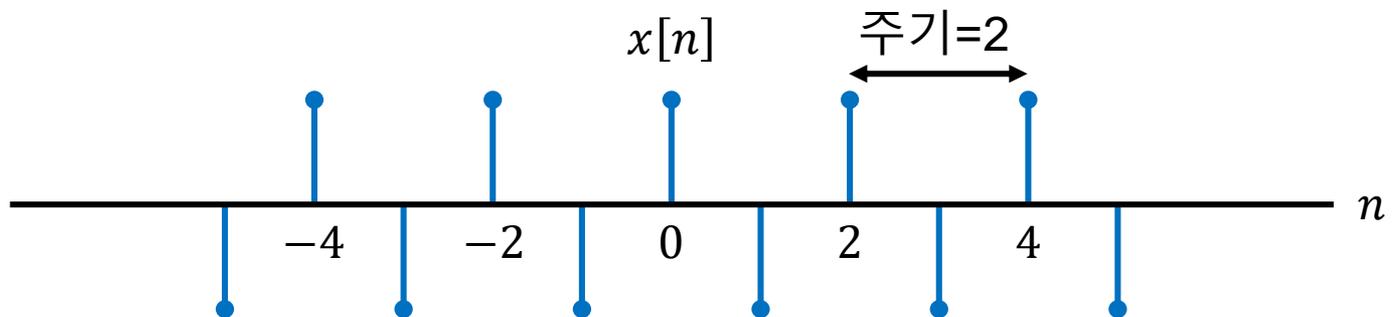
이산 주파수 개념

- 이산 코사인 신호의 주파수
 - 이산 신호의 주파수를 $-0.5 \leq \hat{f} < 0.5$ 사이로 한정하여도 모든 주파수 값을 빠짐없이 표시할 수 있음

최저 주파수
 $\hat{f} = 0$

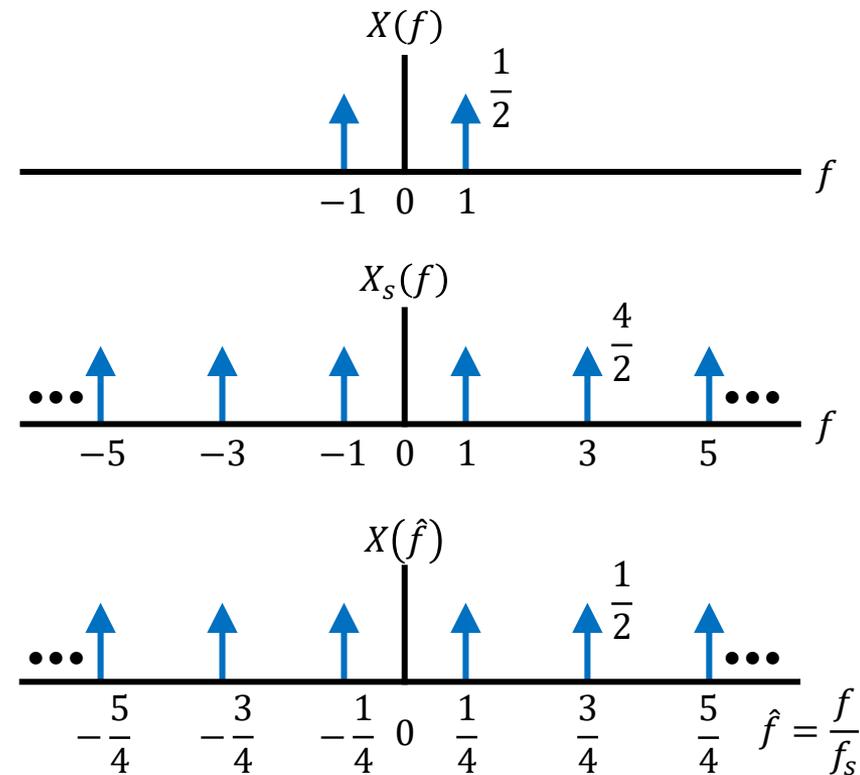
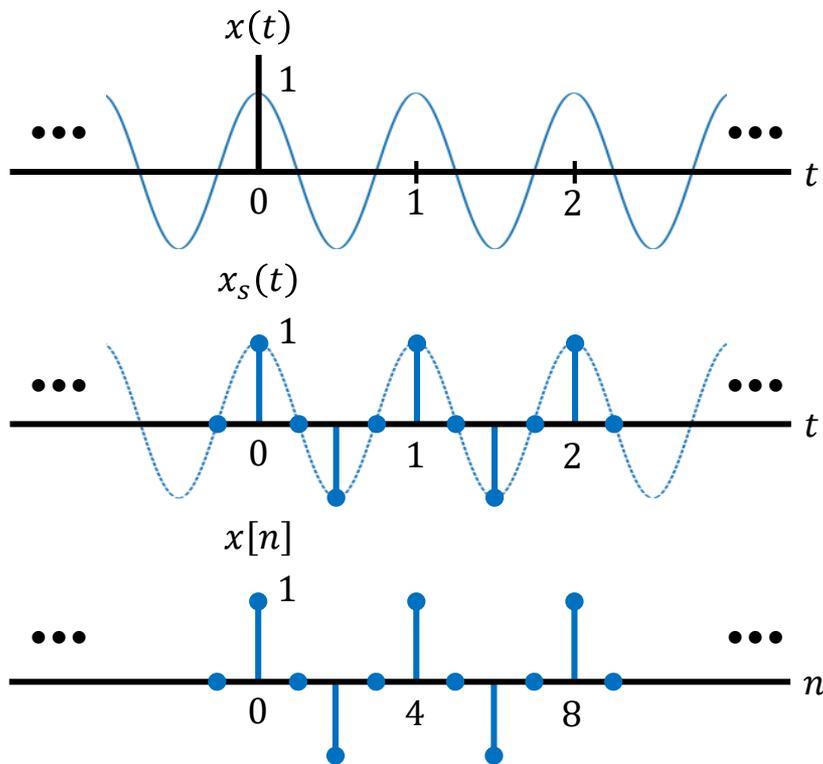


최고 주파수
 $\hat{f} = 0.5$



이산 주파수 개념

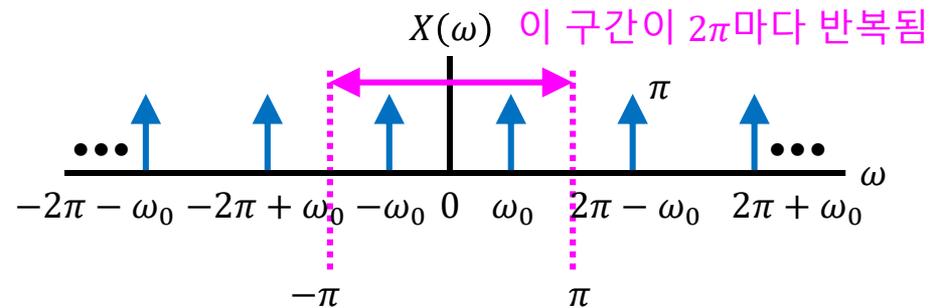
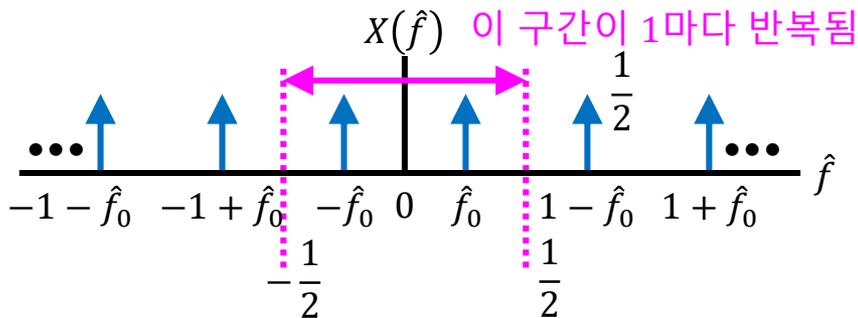
이산 코사인 신호의 스펙트럼



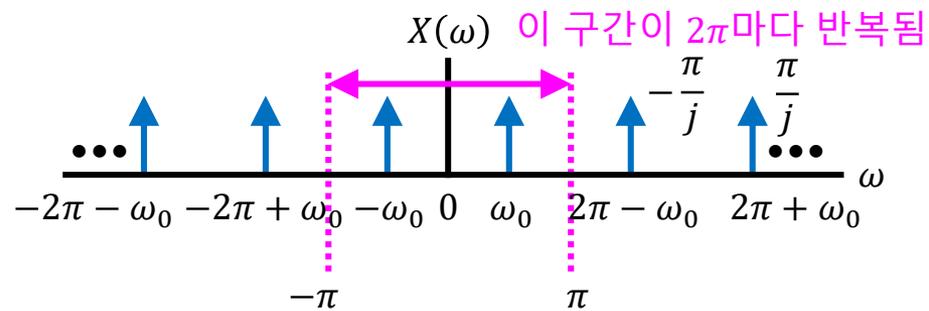
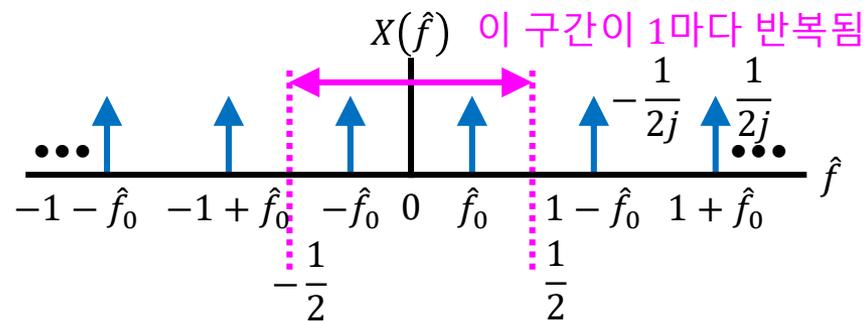
이산 주파수 개념

- 일반적인 코사인 신호와 사인 신호의 스펙트럼

- 코사인 신호 : $x[n] = \cos[2\pi\hat{f}_0n] = \cos[\omega_0n]$

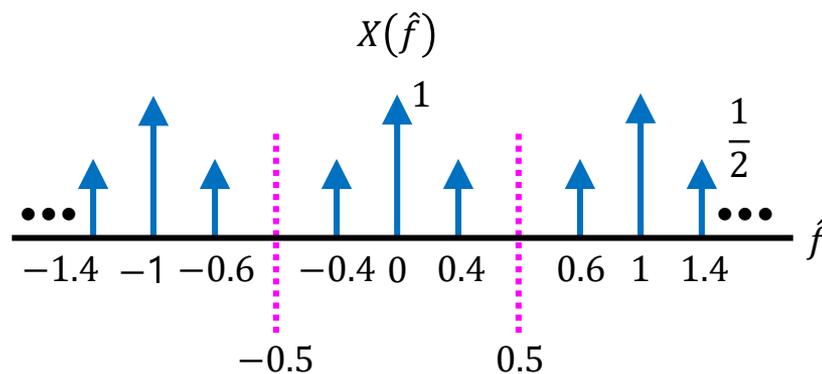


- 사인 신호 : $x[n] = \sin[2\pi\hat{f}_0n] = \sin[\omega_0n]$



이산 주파수 개념

- 주어진 스펙트럼으로부터 이산 신호를 구함



$$x[n] = 1 + \cos[2\pi 0.4n]$$

이산 주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 급수

연속 주기 신호	이산 주기 신호
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\frac{2\pi}{T} kt}$	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{j2\pi kn \hat{f}_0} = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$
$X_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T} kt} dt$	$X_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$

이산 시간 푸리에 시리즈(**DTFS**: Discrete-Time Fourier Series)

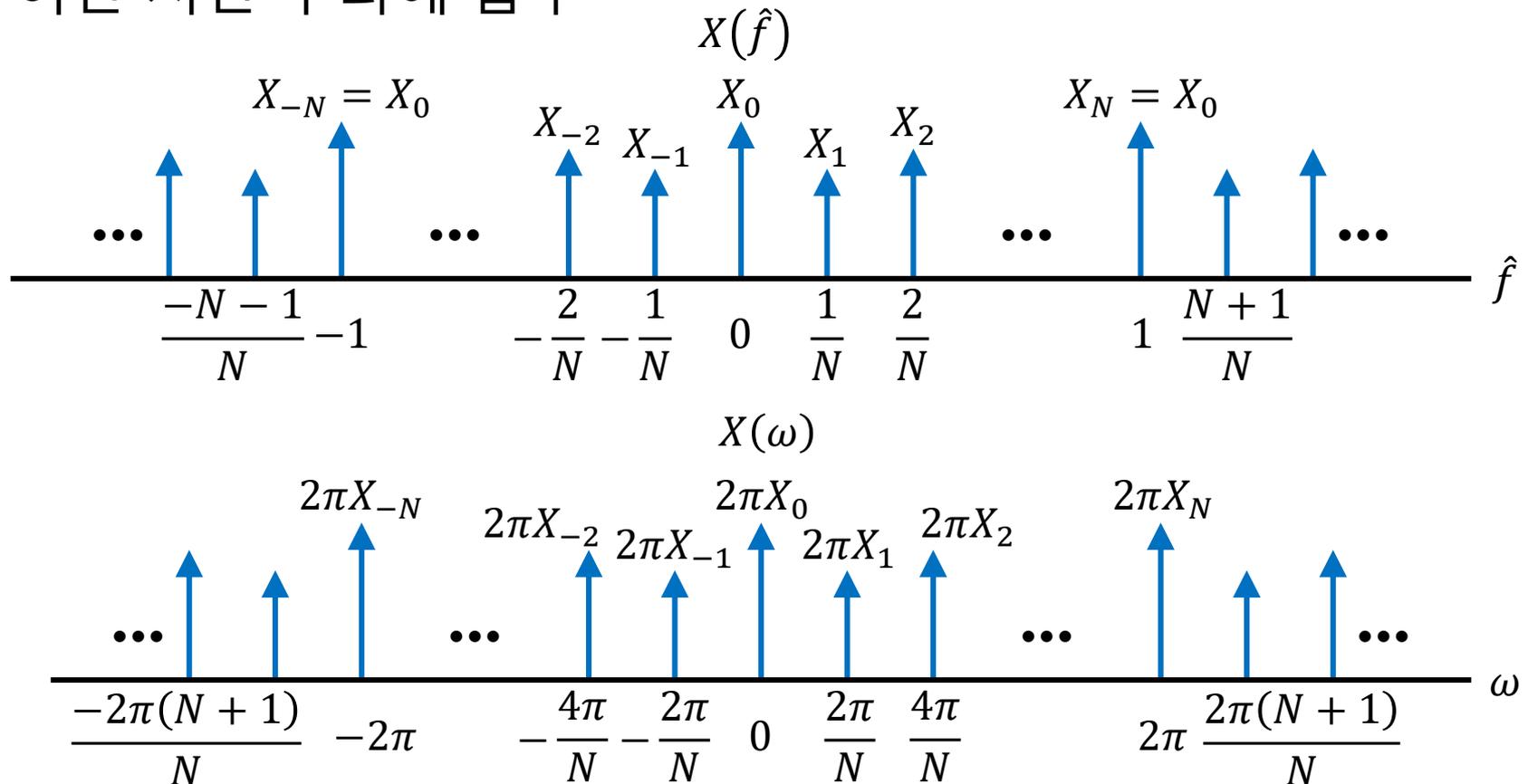
이산 시간 푸리에 급수 계수 ←

- $x[n]$ 이 실수인 경우 :

$$x[n] = \sum_{k=0}^M A_k \cos[2\pi \hat{f}_0 kn + \phi_k] = \sum_{k=0}^M A_k \cos\left[\frac{2\pi}{N} kn + \phi_k\right]$$

이산 주기 신호의 주파수 해석

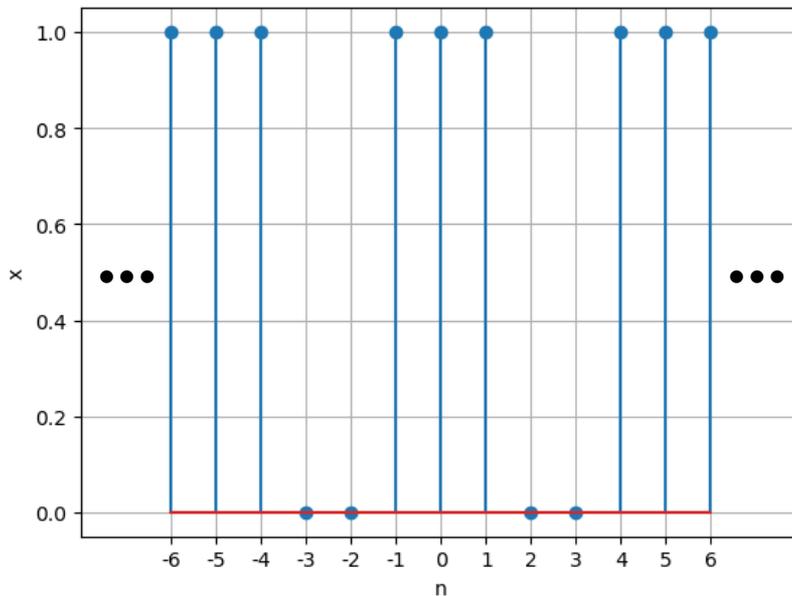
- 이산 시간 푸리에 급수



이산 주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 급수
 - 예,

주어진 신호 $x[n]$



$$\begin{aligned}
 X_{k, k \neq 0} &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\
 &= \frac{1}{5} \sum_{n=-1}^1 (1) e^{-j \frac{2\pi}{5} kn} \\
 &= \frac{1}{5} \frac{e^{j \frac{2\pi}{5} k} (1 - e^{-j \frac{2\pi}{5} k 3})}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{5} k}} \\
 &= \frac{1}{5} \frac{e^{j \frac{2\pi}{5} k} e^{-j \frac{2\pi 3k}{5 \cdot 2}} (e^{j \frac{2\pi 3k}{5 \cdot 2}} - e^{-j \frac{2\pi 3k}{5 \cdot 2}})}{e^{-j \frac{2\pi k}{5 \cdot 2}} (e^{j \frac{2\pi k}{5 \cdot 2}} - e^{-j \frac{2\pi k}{5 \cdot 2}})} \\
 &= \frac{1}{5} \frac{e^{-j \frac{2\pi k}{5 \cdot 2} 2} j \sin\left(\frac{2\pi 3k}{5 \cdot 2}\right)}{e^{-j \frac{2\pi k}{5 \cdot 2} 2} j \sin\left(\frac{2\pi k}{5 \cdot 2}\right)} \\
 &= \frac{1}{5} \frac{\sin\left(\frac{2\pi 3k}{5 \cdot 2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi k}{5 \cdot 2}\right)} = \frac{1}{5} \frac{\sin\left(\frac{3\pi k}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{5}\right)}
 \end{aligned}$$

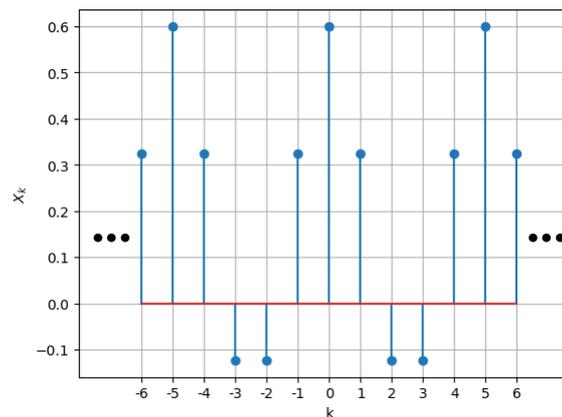
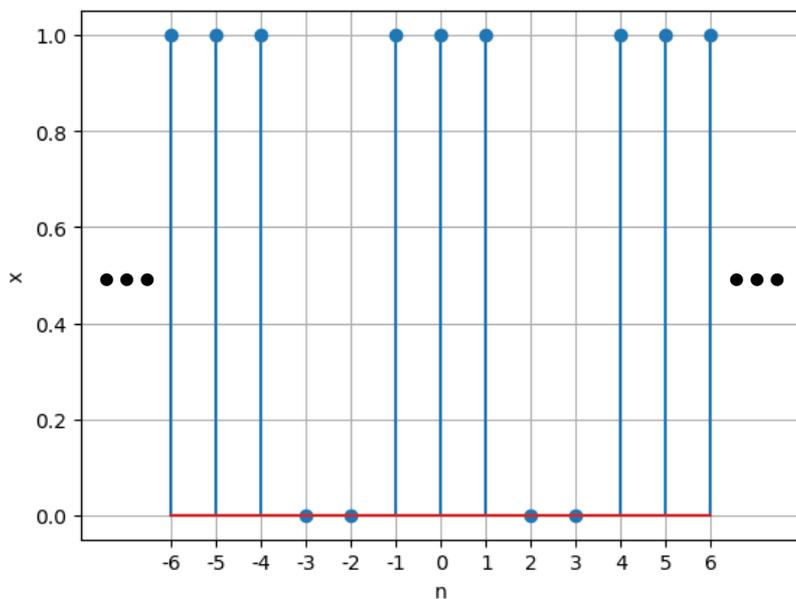
$$X_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] = \frac{3}{5}$$

이산 주기 신호의 주파수 해석

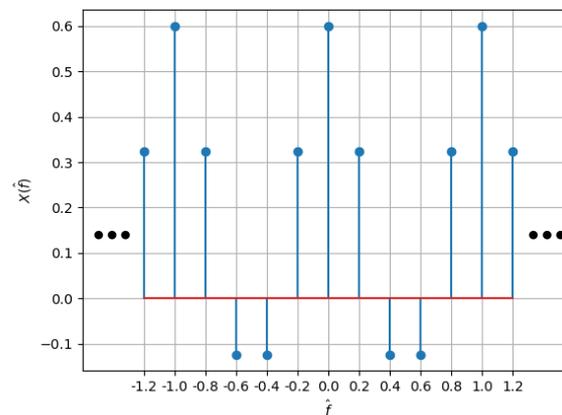
■ 이산 시간 푸리에 급수

- 예,

주어진 신호 $x[n]$



DTFS 계수



스펙트럼

이산 주기 신호의 주파수 해석

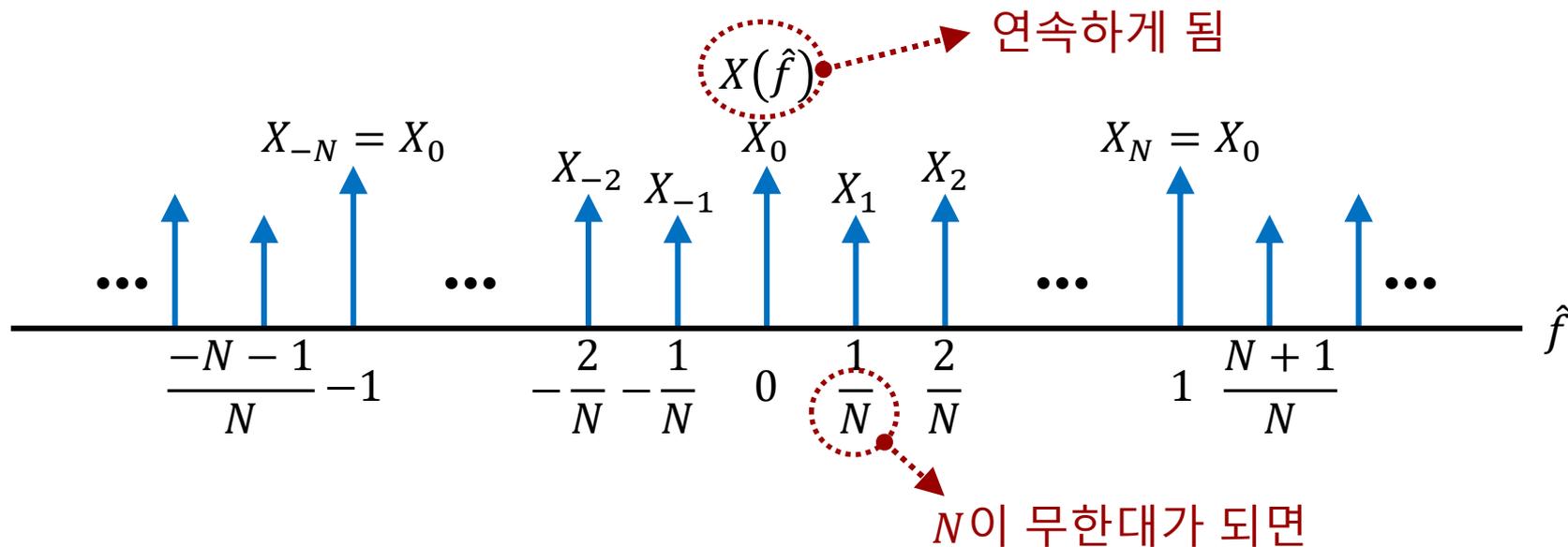
- 이산 시간 푸리에 급수 성질
 - X_k 의 주기 성질 : 주기 N 을 가지는 이산 신호의 이산 시간 푸리에 급수 계수는 주기 N 을 가짐, 즉 $X_k = X_{k+N}$
 - X_k 와 X_{-k} 의 관계 : $x[n]$ 이 실수이면 $X_k = X_{-k}^*$ 관계가 성립함, 즉 $|X_k| = |X_{-k}|$
 - $x[n]$ 의 시간 이동 성질 : 주기 N 인 이산 주기 신호 $x[n]$ 을 시간 축에서 이동시키면 이산 시간 푸리에 급수 계수의 위상이 변함

이산 주기 신호	이산 시간 푸리에 급수 계수	
$x[n]$	X_k	
$x[n - L]$	$X_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}$	$-\frac{2\pi}{N}kL$ 위상 변화
$x[n + L]$	$X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kL}$	$\frac{2\pi}{N}kL$ 위상 변화

이산 비주기 신호의 주파수 해석

■ 이산 시간 푸리에 변환

- 이산 주기 신호의 주기 N 이 무한대가 되면 이산 비주기 신호를 얻게 됨
- $N \rightarrow \infty$ 이 되면 이산 주기 신호의 스펙트럼 $X(\hat{f})$ 가 연속 스펙트럼이 됨



이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 변환(**DTFT**: Discrete-Time Fourier Transform)

$$X(\hat{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi\hat{f}n} \quad \text{혹은} \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

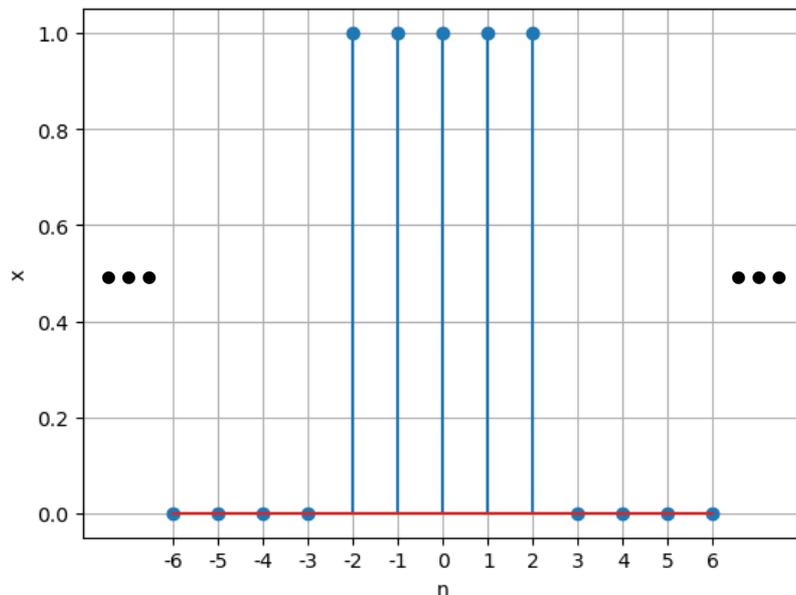
- 이산 시간 푸리에 역변환

$$x[n] = \int_{\langle 1 \rangle} X(\hat{f})e^{j2\pi\hat{f}n}d\hat{f} \quad \text{혹은} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 변환
 - 예,

주어진 신호 $x[n]$



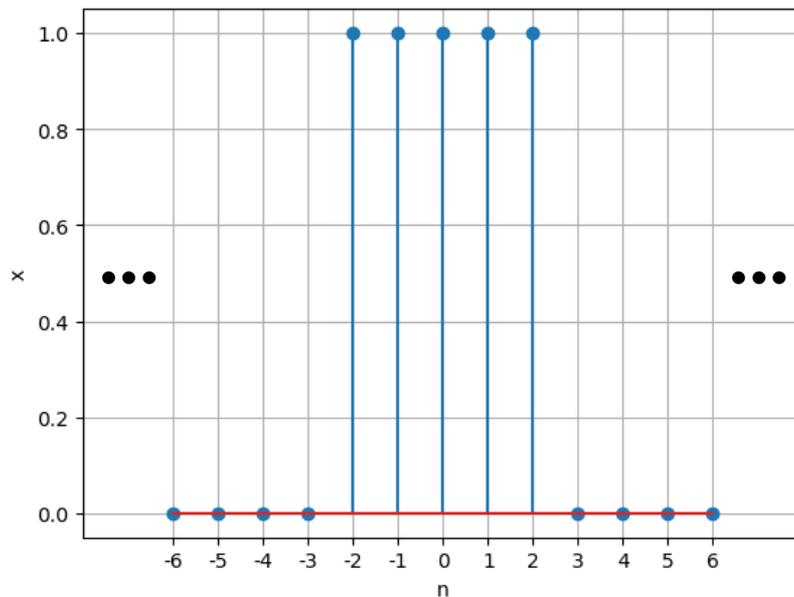
$$\begin{aligned}
 X(\hat{f}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi\hat{f}n} \\
 &= \sum_{n=-2}^2 (1) e^{-j2\pi\hat{f}n} \\
 &= \frac{e^{j2\pi\hat{f}} (1 - e^{-j2\pi 5\hat{f}})}{1 - e^{-j2\pi\hat{f}}}, \hat{f} \neq 0 \\
 &= \frac{\sin\left(2\pi\frac{5}{2}\hat{f}\right)}{\sin\left(2\pi\frac{1}{2}\hat{f}\right)}
 \end{aligned}$$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 5$$

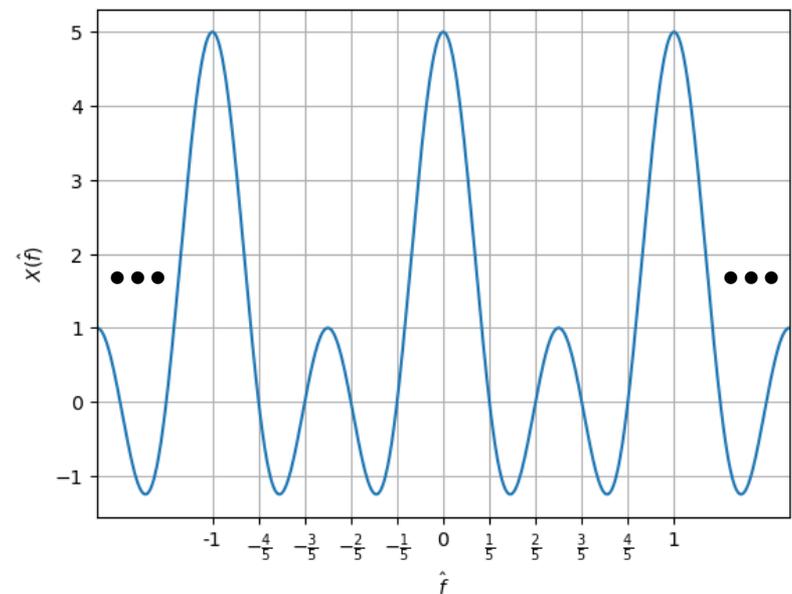
이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 변환
 - 예,

주어진 신호 $x[n]$



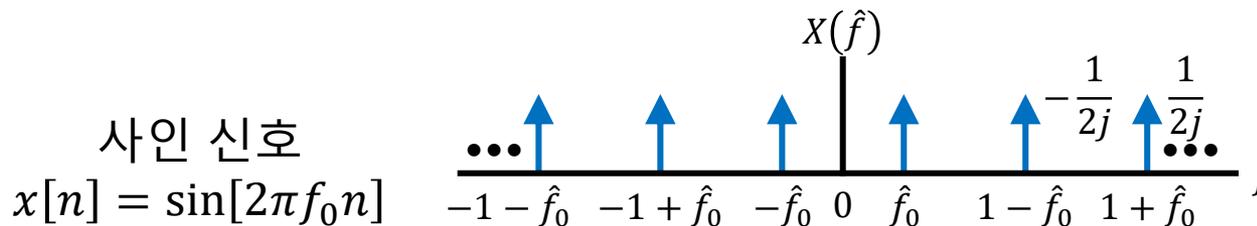
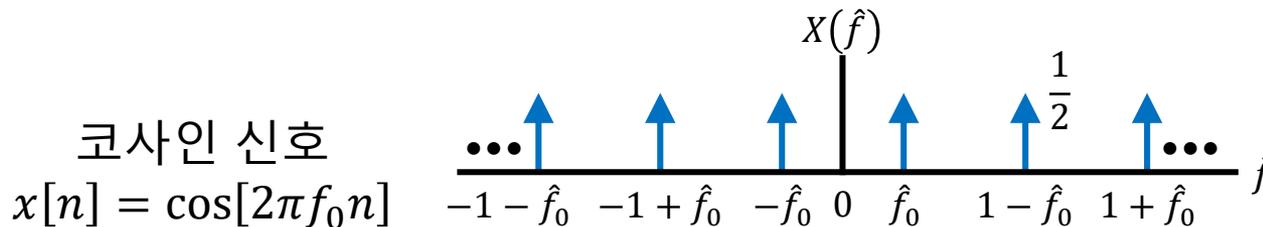
스펙트럼 $X(\hat{f})$



이산 비주기 신호의 주파수 해석

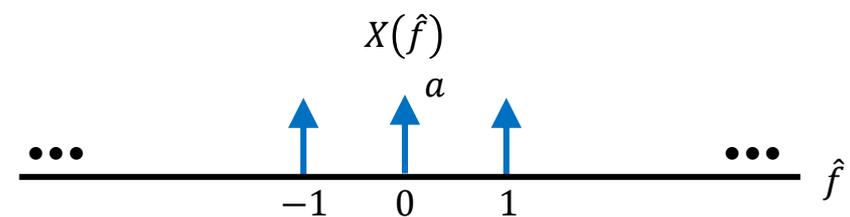
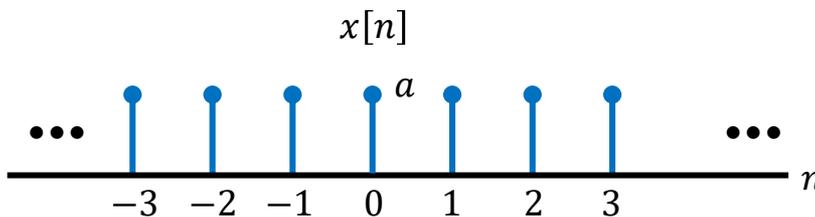
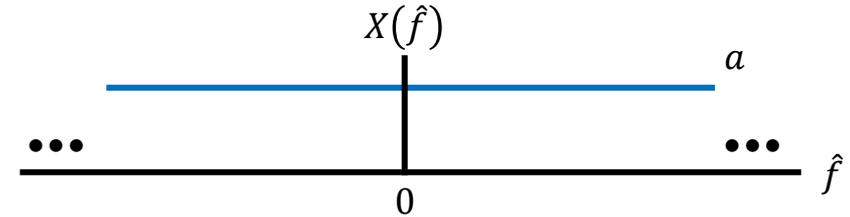
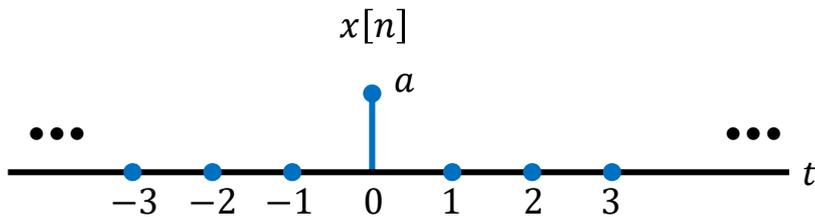
주요 이산 시간 푸리에 변환 관계

- 구형파 : 구형파의 스펙트럼이 반복되는 싱크(sinc) 함수이며, 구형파의 폭과 높이에 따라 $X(\hat{f}) = 0$ 이 되는 주파수와 $X(0)$ 값이 결정됨
- 코사인 및 사인 신호 :



이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 주요 이산 시간 푸리에 변환 관계
 - 이산 펄스 신호와 상수 신호 :



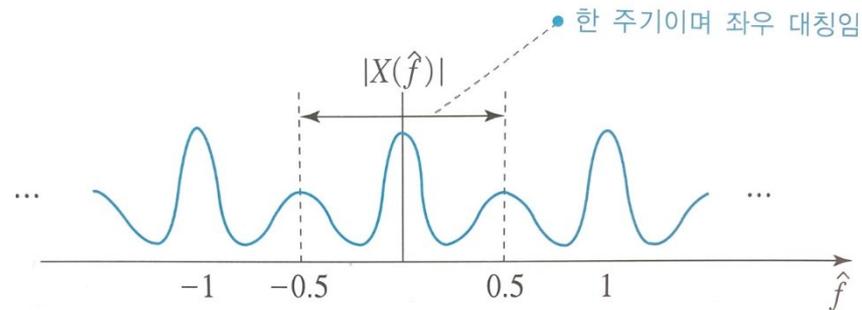
$$x[n] = e^{j2\pi an} \Leftrightarrow X(\hat{f}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\hat{f} - a - k)$$

이산 비주기 신호의 주파수 해석

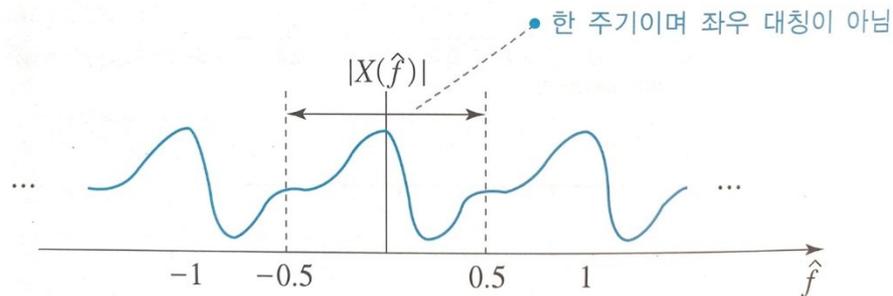
■ 이산 시간 푸리에 변환 성질

- 대칭 성질 : $x[n]$ 이 실수이면 $X(\hat{f})$ 는 좌우 복수 대칭임, 즉 $X(\hat{f}) = X^*(-\hat{f})$

실수 $x[n]$ 의
스펙트럼 절댓값



복수 $x[n]$ 의
스펙트럼 절댓값



이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 변환 성질
 - 시간 및 주파수 이동 성질 :

$$x[n - a] \Leftrightarrow X(\hat{f})e^{-j2\pi\hat{f}a}$$

$$e^{j2\pi an}x[n] \Leftrightarrow X(\hat{f} - a)$$

- Parseval 정리 :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{\langle 1 \rangle} |X(\hat{f})|^2 d\hat{f}$$

이산 비주기 신호의 주파수 해석

- 이산 시간 푸리에 변환 성질
 - 컨벌루션 성질과 곱 성질 :

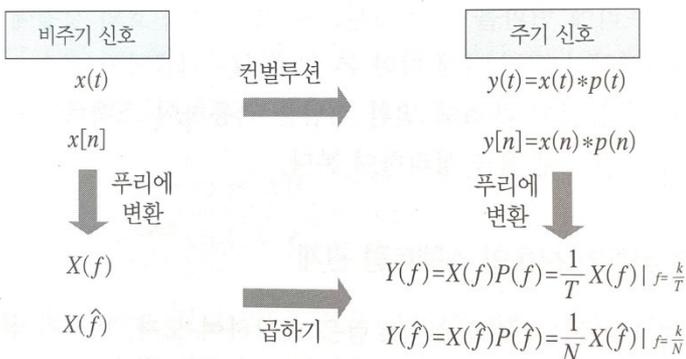
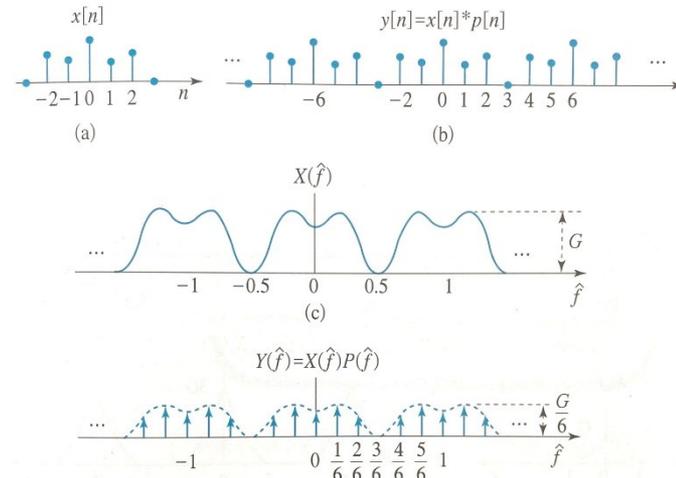
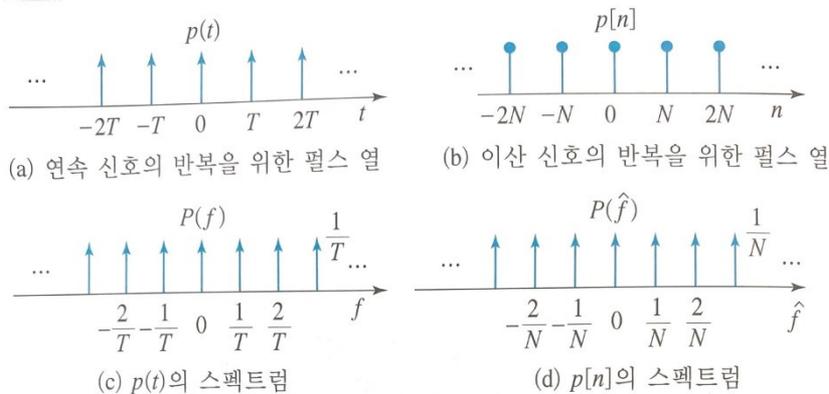
$$x[n] \Leftrightarrow X(\hat{f})$$

$$y[n] \Leftrightarrow Y(\hat{f})$$

$$x[n] * y[n] \Leftrightarrow X(\hat{f})Y(\hat{f})$$

신호의 주파수 해석 정리

■ 주기 신호와 비주기 신호의 스펙트럼 관계

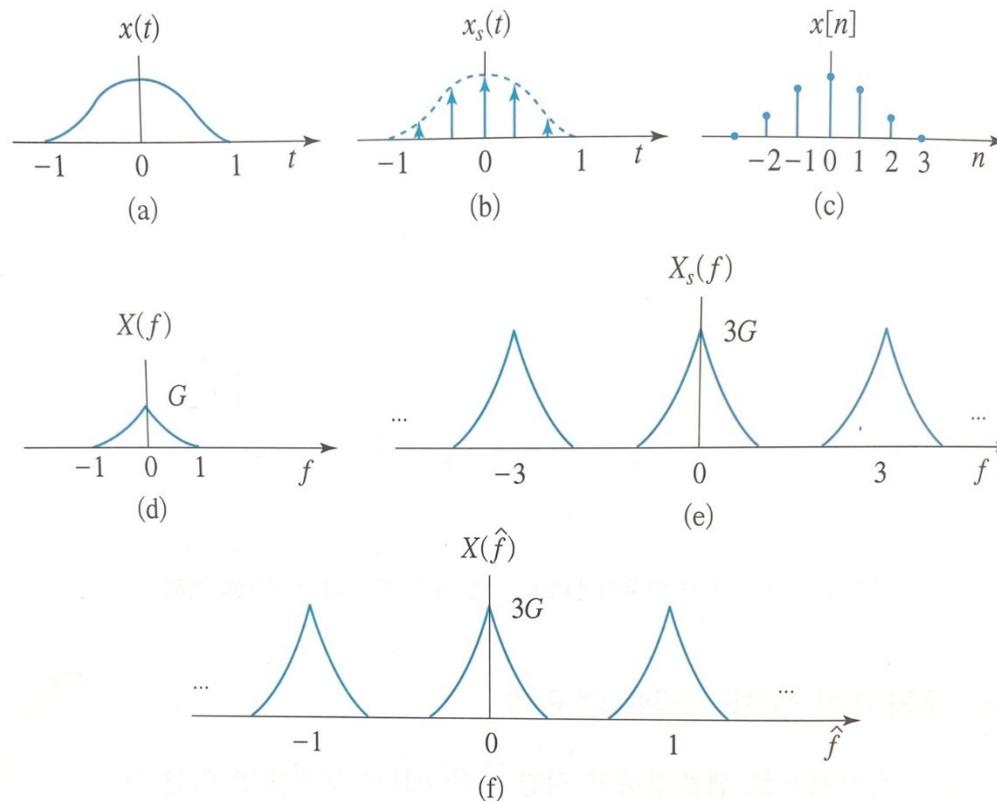


(e) 푸리에 변환을 통하여 주기 신호의 스펙트럼을 구하는 과정

	연속 신호 $x(t)$	이산 신호 $x[n]$
주기	T	N
주파수	$\frac{1}{T}$	$\frac{1}{N}$

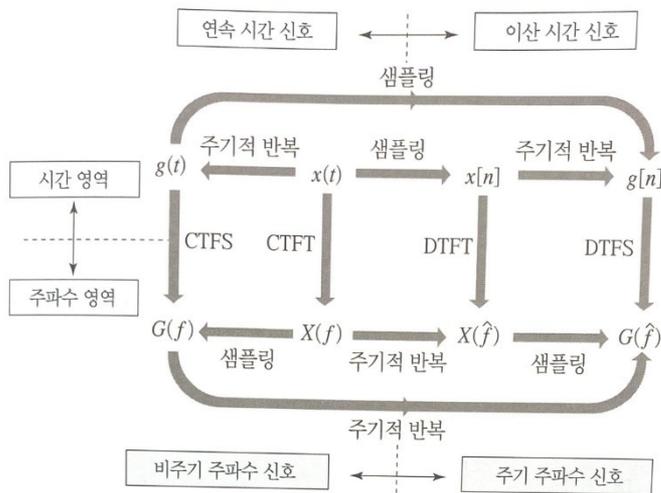
신호의 주파수 해석 정리

- 연속 신호와 이산 신호의 스펙트럼 관계



신호의 주파수 해석 정리

신호와 스펙트럼 관계



(a) 시간 영역 신호와 주파수 영역 신호와의 관계

시간 영역 성질	주기	비주기
연속	이산, 비주기	연속, 비주기
이산	이산, 주기	연속, 주기

(b) 시간 영역의 성질에 따른 주파수 영역 성질

