Lecture 08

라플라스 변환과 아날로그 시스템

라플라스 변환

- 특정 $x(t)$에 대하여 $X(f)$가 존재하지 않은 경우가 있음
  - 예, $x(t) = e^{2t}u(t)$

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \int_0^\infty e^{2t}e^{-j\Omega t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{(2-j\Omega)t}dt \\
&= \frac{1}{2-j\Omega}e^{2t}e^{-j\Omega t}\Big|_0^\infty \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

- 연속 시간 푸리에 변환을 확장한 개념인 라플라스 변환 (**Laplace transform**)을 도입함

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

라플라스 변환

- 라플라스 변환 : $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$
  - $s = \sigma + j\Omega,\ \Omega = 2\pi f$
  - s는 복소 변수
  - $\sigma = 0$인 경우 $s = j\Omega$에서의 $X(s)$ 값이 $x(t)$의 연속 시간 푸리에 변환과 동일함
- 라플라스 변환은 보통 다음과 같이 표시함

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

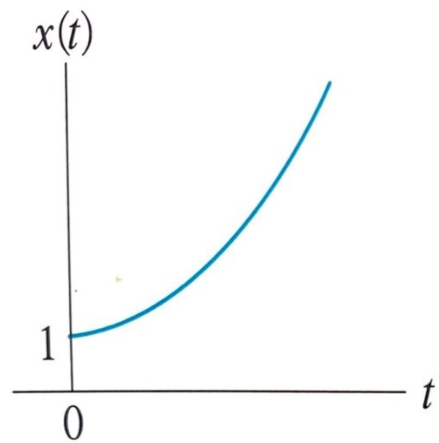
$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

라플라스 변환

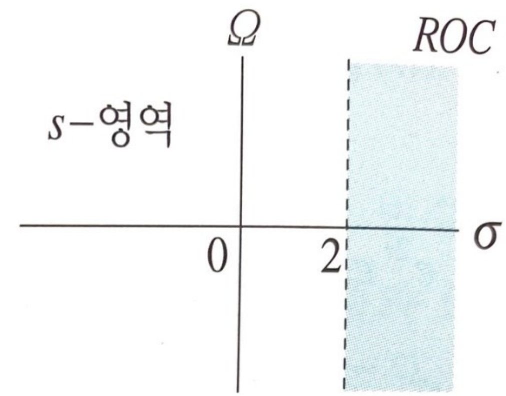
- 예, $x(t) = e^{2t}u(t)$
  - $X(\Omega) = \infty$

ROC(region of convergence, 수렴영역)

$$X(s) = \int_0^\infty e^{2t} e^{-st} dt$$
$$= \int_0^\infty e^{(2-s)t} dt$$
$$= \frac{1}{2-s} e^{(2-\sigma)t} e^{-j\Omega t} \Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s-2} \quad \text{if} \quad 2-\sigma < 0$$
$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad ROC: Re\{s\} > 2$$



(a) $x(t)$

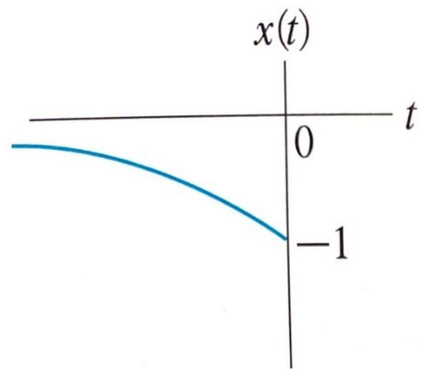


(b) 라플라스 변환의 ROC

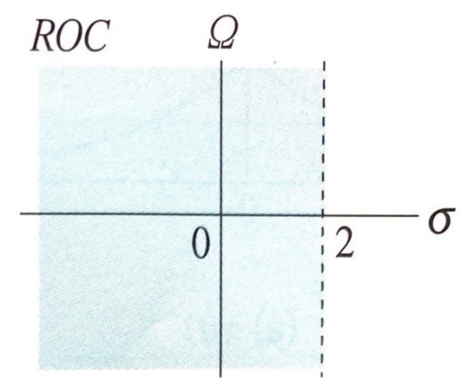
라플라스 변환

- 예, $x(t) = -e^{2t}u(-t)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-st} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{(2-s)t} dt \\
&= \frac{-1}{2-s} e^{(2-\sigma)t} e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{s-2} \quad \text{if} \quad 2-\sigma > 0 \\
X(s) &= \frac{1}{s-2}, \quad ROC: Re\{s\} < 2
\end{aligned}
$$



(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

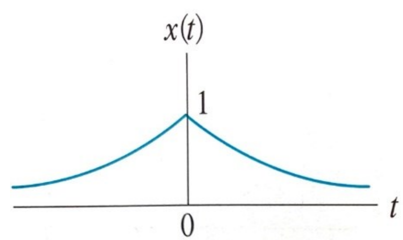
$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, ROC: Re\{s\} > Re\{-a\}$$

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, ROC: Re\{s\} < Re\{-a\}$$

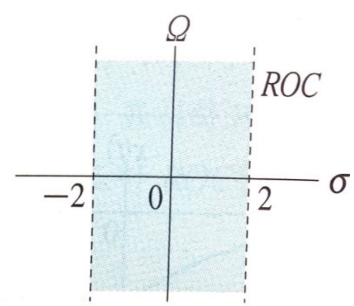
라플라스 변환

- 예, $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2-s}e^{(2-\sigma)t}e^{-j\Omega t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2-s}e^{-(2+\sigma)t}e^{-j\Omega t}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} \quad \text{if} \quad 2-\sigma > 0 \text{ and } 2+\sigma > 0 \\
X(s) &= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}, \quad ROC: -2 < Re\{s\} < 2
\end{aligned}
$$



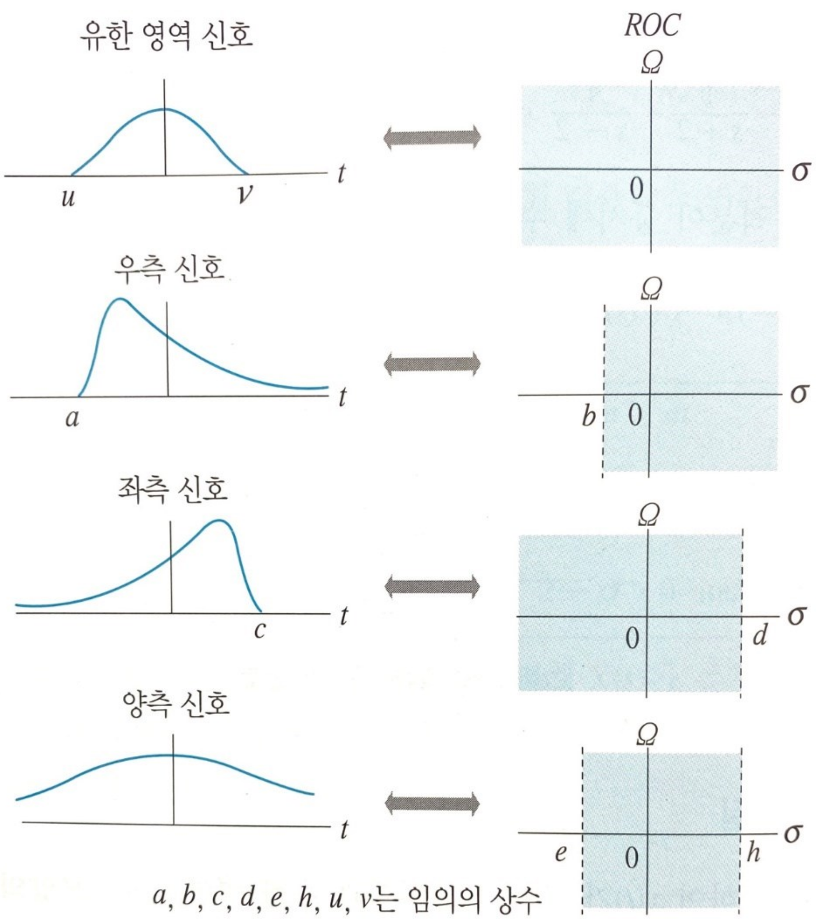
(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

수렴 영역 성질

$x(t)$의 존재 영역	ROC의 형태
$u < t < v$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (유한 영역 신호)	모든 s-영역
$t > a$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (우측 신호)	$Re\{s\} > b$ (s-평면의 오른쪽 영역)
$t < c$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (좌측 신호)	$Re\{s\} < d$ (s-평면의 왼쪽 영역)
$x(t)$ $-\infty$부터 ∞까지 존재 (양측 신호)	$e < Re\{s\} < h$ (s-평면의 수직띠 영역)



라플라스 변환 성질

- 선형성
  - $X_1(s) = L\{x_1(t)\}, X_2(s) = L\{x_2(t)\}$
  - a_1, a_2는 임의의 상수

  $\rightarrow x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow X(s) = a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$

  - 예, $x(t) = \cos(\Omega_0 t)\, u(t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} u(t)$

    $\frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\Omega_0}\right),\ ROC: Re\{s\} > 0$

    $\frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + j\Omega_0}\right),\ ROC: Re\{s\} > 0$

    $\cos(\Omega_0 t)\, u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\Omega_0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + j\Omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2},\ ROC: Re\{s\} > 0$

라플라스 변환 성질

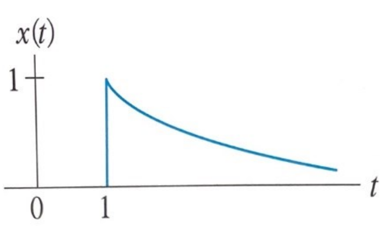
- 시간 이동 성질
  - $x(t)$를 시간 축에서 a만큼 이동시킨 $x(t-a)$의 라플라스 변환은 $e^{-as}X(s)$가 되고 ROC는 변하지 않음

$$x(t-a) \leftrightarrow e^{-as}X(s),\ ROC: X(s)\text{의 } ROC$$

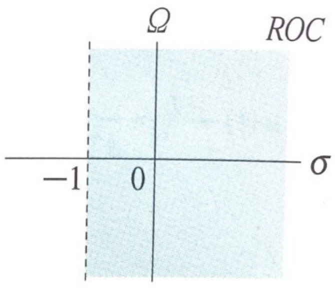
  - 예, $x(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$

    $y(t) = e^{-t}u(t)$라 할 때 $x(t) = y(t-1)$이므로 시간 이동 성질을 이용함

$$X(s) = e^{-s}Y(s) = \frac{e^{-s}}{s+1},$$
$$ROC: Re\{s\} > 1$$



(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

라플라스 변환 성질

- s-영역 이동 성질
  - $X(s)$를 s-영역에서 a만큼 이동시킨 $X(s-a)$에 대응하는 시간 영역 신호는 다음과 같음

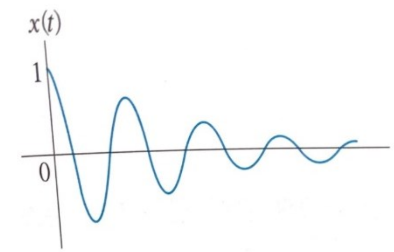
$$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a),\ ROC: X(s)\text{의 } ROC\text{를 } a\text{이동}$$

  - 예, $x(t) = e^{-2t}\cos(\Omega_0 t)u(t)$

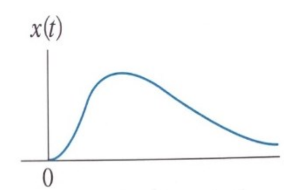
    s-영역에서 코사인 신호의 라플라스 변환을 -2이동

$$\cos(\Omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\Omega_0^2},\ ROC: Re\{s\} > 0$$

$$e^{-2t}\cos(\Omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2+\Omega_0^2},\ ROC: Re\{s\} > 2$$



(a) $x(t)=e^{-2t}\cos(\Omega_0 t)u(t)$ 신호



(b) $x(t)=te^{-t}u(t)$ 신호

라플라스 변환 성질

- 척도 조절
  - $x(t)$에 대한 라플라스 변환을 $X(s)$라 하고 ROC를 R이라 할 때, 시간 영역 및 s-영역에서의 척도 조절 성질은 다음과 같음

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right),\ ROC\colon R\text{를 } a\text{만큼 척도 조절}$$

- 미분 성질
  - $x(t)$에 대한 라플라스 변환을 $X(s)$라 할 때, 다음 성질을 가짐

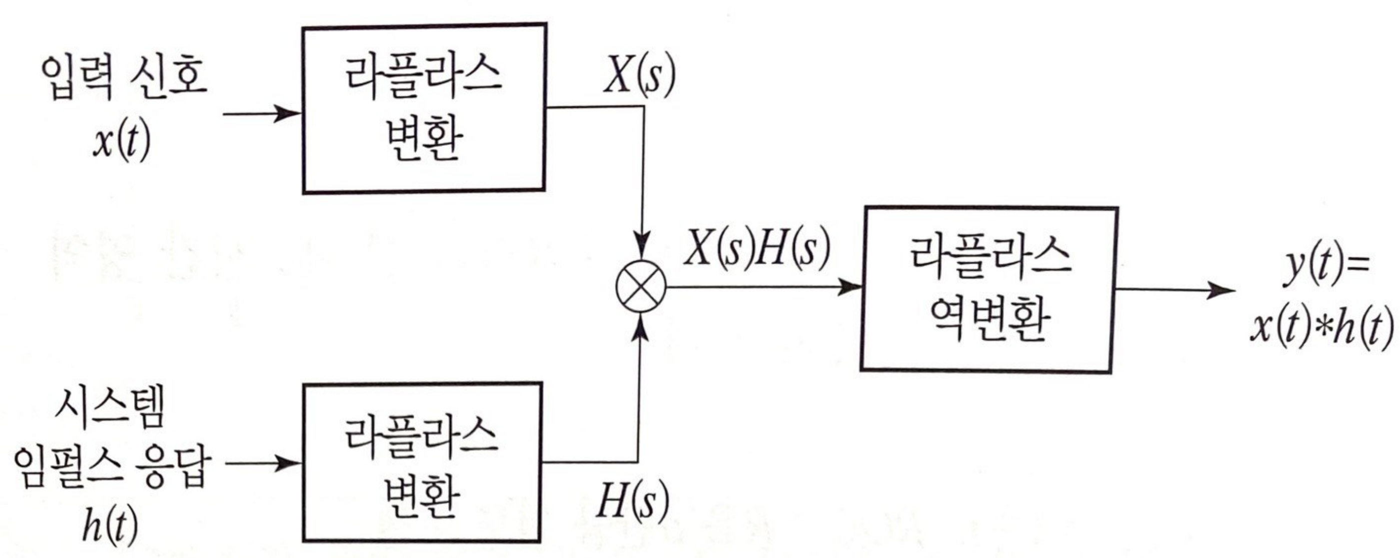
$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s),\ ROC\colon X(s)\text{의 } ROC\text{를 포함}$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds},\ ROC\colon X(s)\text{의 } ROC$$

라플라스 변환 성질

- 컨벌루션 성질
  - $x_1(t)$, $x_2(t)$의 라플라스 변환이 각각 $X_1(s)$, $X_2(s)$이고 ROC를 R_1, R_2라 할 때,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s),\ ROC: R_1 \cap R_2 \text{를 포함}$$



라플라스 변환 표

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	All s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$\frac{-t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} < -a$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$Re\{s\} > -a$

라플라스 역변환

- 라플라스 역변환(inverse Laplace transform)

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

- 복소 적분은 이해하기 매우 어려운 내용이므로 구했던 라플라스 변환 결과를 이용하여 라플라스 역변환을 구함

- 예, $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{s+1} &\leftrightarrow e^{-t}u(t) \\ \frac{-1}{s+2} &\leftrightarrow -e^{-2t}u(t) \end{aligned}\right\} \quad x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

LTI 시스템 분석

- 배웠던 LTI 시스템 분석 방법
  - 시간 영역 : 임펄스 응답 $h(t)$로 시스템을 정의하고 입력 신호와 $h(t)$의 컨벌루션 연산으로 출력 신호를 구함
  - 주파수 영역 : 주파수 응답 $H(f)$로 시스템을 정의하고 입력 신호의 스펙트럼 $X(f)$와 $H(f)$의 곱을 통하여 출력 신호의 스펙트럼을 구함
- 시스템이 구체적으로 어떤 물리적인 동작을 실행하는지를 알기에는 부족함

→ 라플라스 변환을 이용하면 LTI 시스템을 구체적으로 분석할 수 있음

LTI 시스템 분석

- 예, 주어진 시스템의 임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$
  - 라플라스 변환 : $H(s) = \frac{1}{s+1}, Re\{s\} > -1$
  - 라플라스 변환의 컨벌루션 성질에 따르면

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{X(s)}{s+1} \Rightarrow (s+1)Y(s) = X(s) \Rightarrow sY(s) + Y(s) = X(s)$$

  - 라플라스 역변환을 적용하고 미분 성질을 이용하면

$$L^{-1}\{sY(s) + Y(s)\} = L^{-1}\{X(s)\}$$

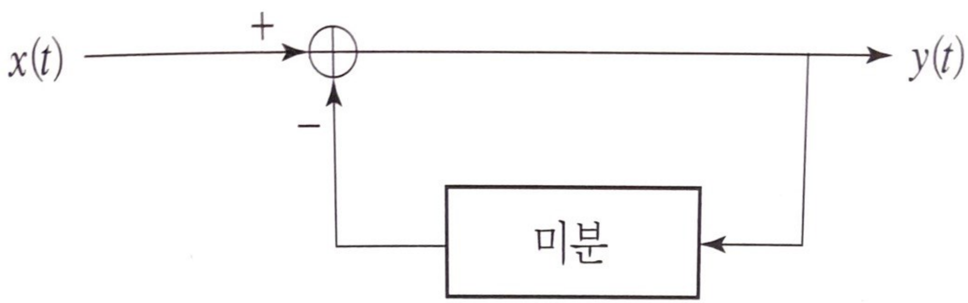
$$L^{-1}\{sY(s)\} + L^{-1}\{Y(s)\} = x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

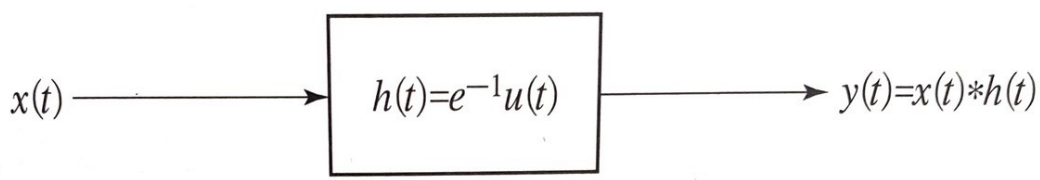
$$y(t) = x(t) - \frac{dy(t)}{dt}$$

LTI 시스템 분석

- 예, 주어진 시스템의 임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$



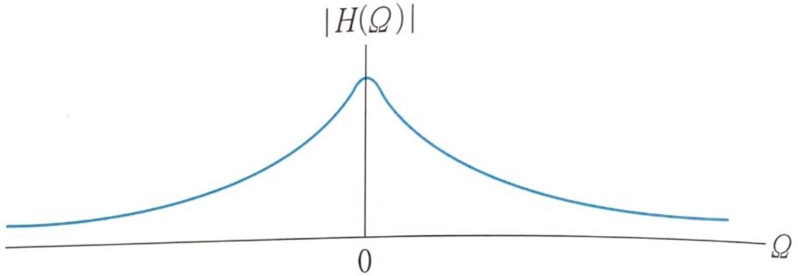
(a) 라플라스 변환을 이용하여 연속 LTI 시스템의 동작을 미분 방정식으로 표현



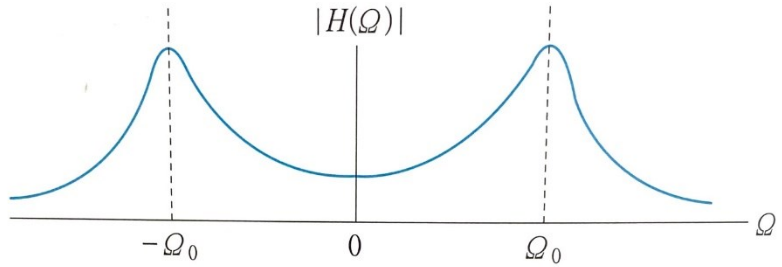
(b) 연속 LTI 시스템의 동작을 입력 신호와 시스템 임펄스 응답과의 컨벌루션으로 표현

LTI 시스템 분석

- 주파수 영역에서 $|H(\Omega)|$의 그래프를 통해서 시스템을 분석할 수 있음



(a) 저주파 강조 시스템



(b) Ω_0 중심 대역을 강조하는 시스템

LTI 시스템 분석

- $H(\Omega) = H(s = \sigma + j\Omega)\Big|_{\sigma = 0}$ 이므로 라플라스 변환을 이용하여 대략적인 $|H(\Omega)|$ 모양을 구할 수 있음

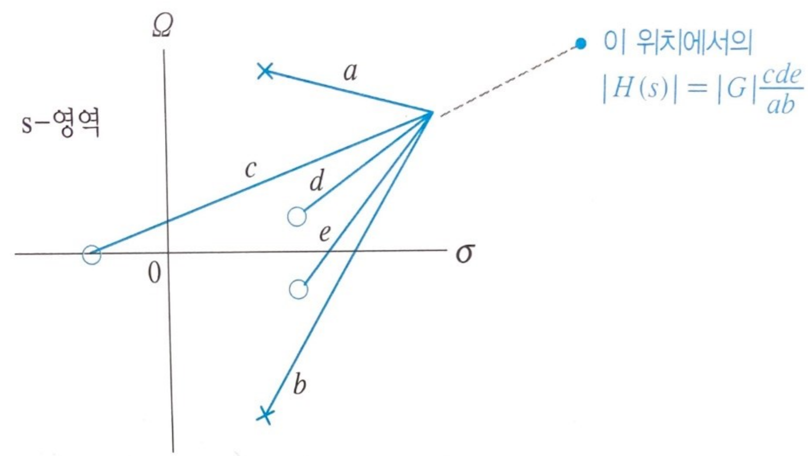
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = G\,\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{P}(s-\alpha_k)}$$

$$|H(s)| = \left|G\,\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{P}(s-\alpha_k)}\right|$$

β_i는 영점(zero)

α_k는 극점(pole)

$$= |G|\,\frac{\prod_{i=1}^{R}|s-\beta_i|}{\prod_{k=1}^{P}|s-\alpha_k|}$$

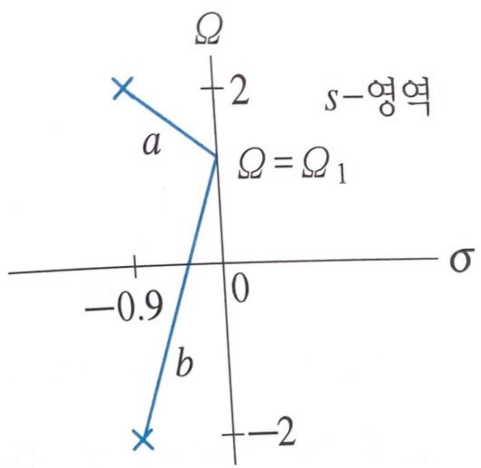


$$|H(s_0)| = |G|\,\frac{\prod_{i=1}^{R}(s_0\text{와 영점 }\beta_i\text{까지의 거리})}{\prod_{k=1}^{P}(s_0\text{와 극점 }\alpha_k\text{까지의 거리})}$$

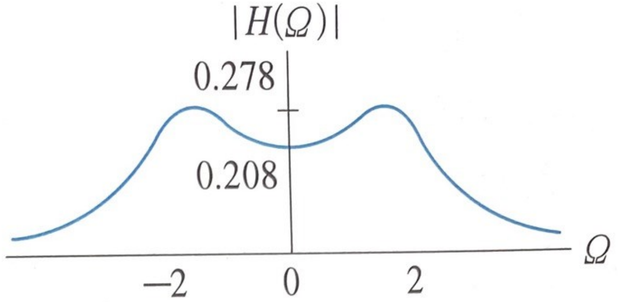
특정 s_0에서의 값

LTI 시스템 분석

- 예, $H(s) = \frac{1}{(s+0.9)^2+4}$
  - 극점 : $s = -0.9 \pm j2$
  - $|H(\Omega)| = \frac{1}{ab}$, $\Omega = \pm 2$일 때 a 또는 b가 0.9로 최솟값이 되어 $\Omega = \pm 2$부근에서 ab값이 매우 작아지고 $|H(\Omega)|$가 큰 값을 가짐. $\Omega = 0$에서 $|H(0)| \approx 0.208$임.



(a) 예제 7.16 시스템의 극점 위치



(b) 예제 7.16 시스템의 주파수 응답 크기

LTI 시스템 분석

- 시스템의 성질과 전달 함수의 수렴 영역