Lecture 09

z-변환과 디지털 시스템

z-변환

- 이산 신호 $x[n]$의 z-변환은 멱급수(**power series**)로 정의됨

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

  - z는 복소 변수
  - $X(z)$가 항상 존재하지 않음
  - $X(z)$가 유한한 값을 갖는 모든 z 값을 $X(z)$의 수렴 영역(**ROC**: region of convergence)이라고 함
- 신호 $x[n]$의 z-변환의 표현은 다음과 같음

$$X(z) = Z\{x[n]\} \qquad \text{또는} \qquad x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

z-변환

- 예
  - $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4,5\}$

    원점$(n = 0)$의 위치

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	2	3	4	5
z^{-n}	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$$

$ROC: z = 0$을 제외한 모든 z-영역

z-변환

- 예
  - $x[n] = \{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,5\}$

    원점$(n = 0)$의 위치

n	–2	–1	0	1	2
$x[n]$	1	2	3	4	5
z^{-n}	z^2	z^1	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2}$$

$ROC: z = 0$과 $z = \infty$를 제외한 모든 z-영역

z-변환

- 예
  - $x[n] = \delta[n]$

n	…	–1	0	1	…
$x[n]$	0	0	1	0	0
z^{-n}	…	z^{1}	$z^{0}=1$	z^{-1}	…

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1$$

ROC: 모든 z-영역

z-변환

- 예
  - $x[n] = \delta[n-k],\, k > 0$

n	…	k – 1	k	k + 1	…
$x[n]$	0	0	1	0	0
z^{-n}	…	$z^{-(k-1)}$	z^{-k}	$z^{-(k+1)}$	…

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^{-k}$$

$ROC: z = 0$을 제외한 모든 z-영역

z-변환

- z-역변환을 구하는 과정이 매우 복잡함
  - 구간이 유한한 신호의 z-역변환은 z의 지수항이 갖고 있는 시간 정보를 가지고 있어서 간단하게 구할 수 있음
  - 예: $X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$

z^{-n}	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
n	0	1	2	3	4	5
$x[n]$	1	–2	0	3	0	–1

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 0, 3, 0, -1\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

원점$(n = 0)$의 위치

z-변환

- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC를 반드시 명시해 야 함
  - 예: $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

기하급수

만약 $|A| < 1$이면 $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots = \frac{1}{1-A}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad ROC: \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

z-변환

- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC를 반드시 명시해 야 함
  - 예: $y[n] = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^n & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n$$

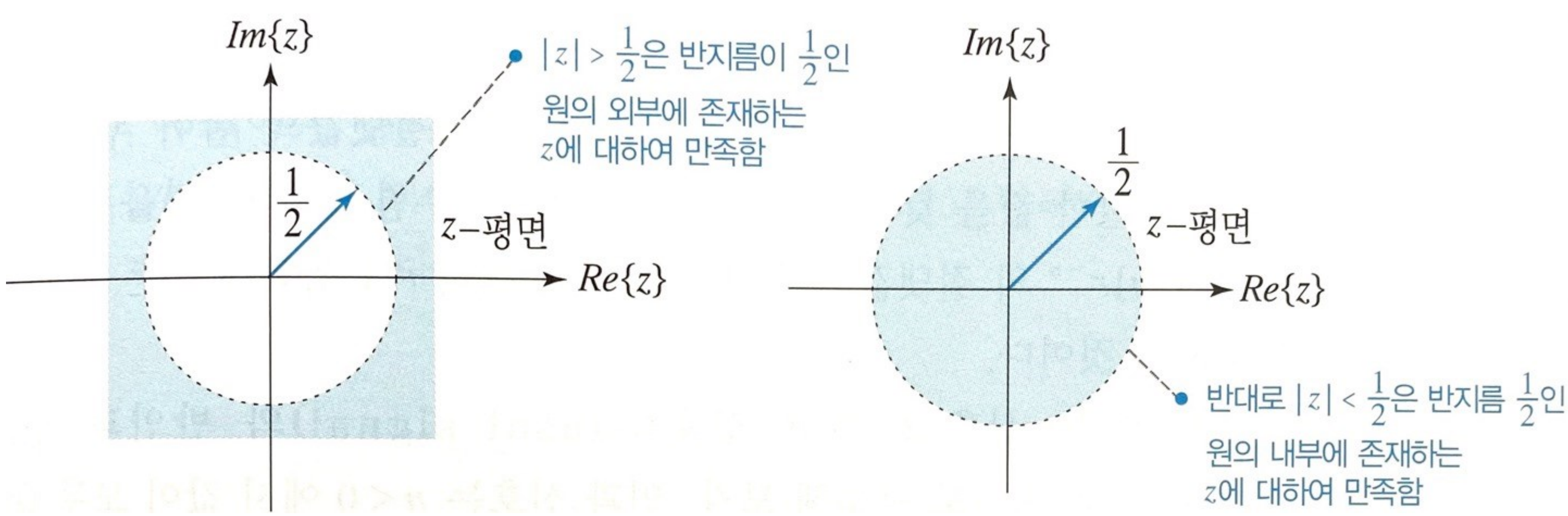
기하급수

만약 $|A| < 1$이면 $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots = \frac{1}{1-A}$

$$Y(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = -\frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad ROC: |2z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

z-변환

- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC를 반드시 명시해 야 함
  - 예: $x[n]$와 $y[n]$ 신호는 서로 다르지만 $X(z)$와 $Y(z)$는 같은 형태를 갖음. 단, ROC가 다름



$X(z)$의 ROC $\qquad$ $Y(z)$의 ROC

z-변환

- z-변환의 수렴
  - z-변환 $X(z)$에서 z를 자기의 극형식(**polar form**) $z = re^{j\theta}$로 대체함

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}$$

  - 수렴 영역에서 $|X(z)| < \infty$를 만족해야 함

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|\left|e^{-j\theta n}\right|$$

  - $\left|e^{-j\theta n}\right| = 1$이므로

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|$$

z-변환

- z-변환의 수렴
  - $x[n]$ 이산 신호를 인과 신호(**causal signal**)와 반인과 신호(**anticausal signal**)로 구분함

$$x_{+}[n] = x[n]u[n]$$

$$x_{-}[n] = x[n]u[-n-1]$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x_{-}[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x_{+}[n]}{r^{n}}\right|$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{-}[-n]r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x_{+}[n]}{r^{n}}\right|$$

z-변환

- z-변환의 수렴
  - $x[n]$ 이산 신호를 인과 신호(**causal signal**)와 반인과 신호(**anticausal signal**)로 구분함

$$|X(z)| \le \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_-[-n]r^n|}_{} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x_+[n]}{r^n}\right|}_{}$$

r의 값이 매우 작아서 $x_-[-n]r^n$의 합이 유한한 값을 가져야 함

r의 값이 매우 커서 $\frac{x_+[n]}{r^n}$의 합이 유한한 값을 가져야 함

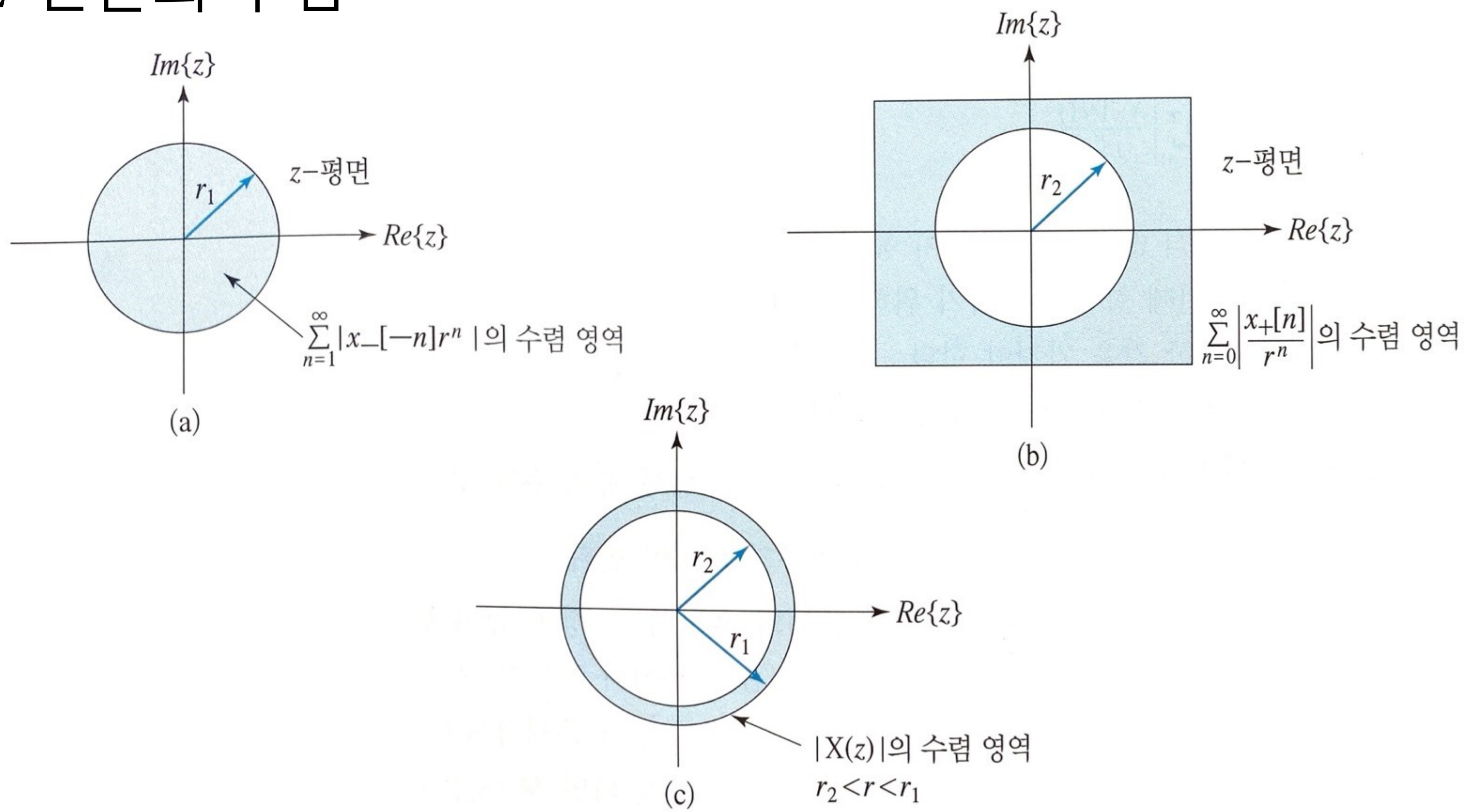
$ROC: r < r_1,\ r_1 < \infty$

$ROC: r > r_2,\ r_2 < \infty$

$ROC: r_2 < r < r_1$

z-변환

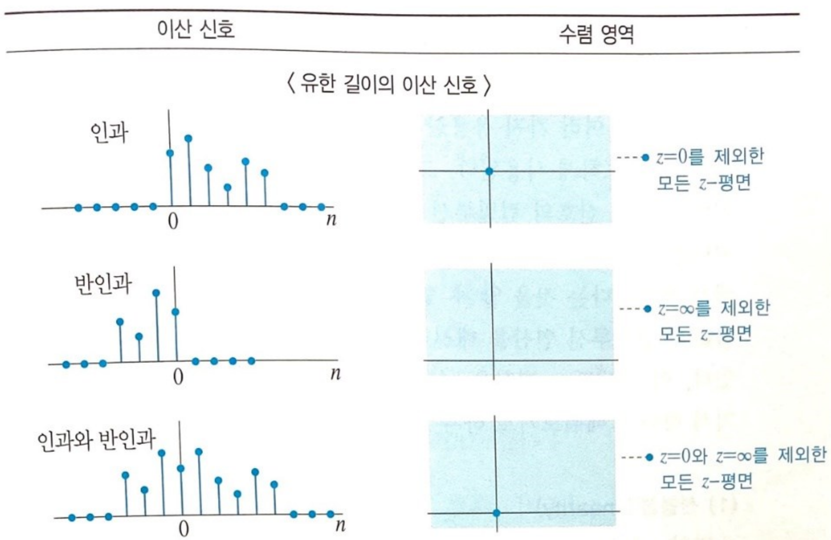
- z-변환의 수렴

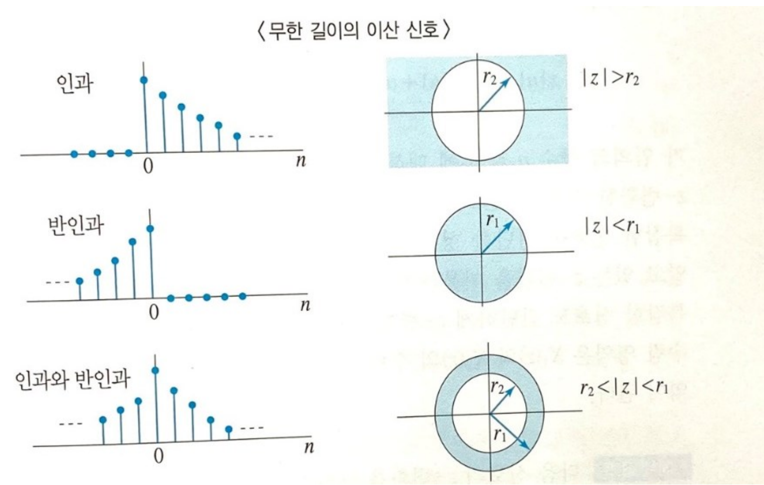


$Im\{z\}$
z–평면
r_1
$Re\{z\}$
$\sum_{n=1}^{\infty}|x_{-}[-n]r^n|$의 수렴 영역
(a)
$Im\{z\}$
z–평면
r_2
$Re\{z\}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_{+}[n]}{r^n}\right|$의 수렴 영역
(b)
$Im\{z\}$
r_2
r_1
$Re\{z\}$
$|X(z)|$의 수렴 영역
$r_2 < r < r_1$
(c)

z-변환

- 신호의 특성과 수렴 영역과의 관계





z-변환의 성질

- 선형성(linearity)
  - 만약 $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)$와 $x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z)$라면

$$x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

    - a_1과 a_2는 임의의 상수
    - $X(z)$의 수렴 영역은 $X_1(z)$와 $X_2(z)$의 수렴 영역의 교집합 즉 각 수렴 영역의 중복 영역이 됨
  - 예, $x[n] = (\cos\omega_0 n)u[n] = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]}_{\text{오일러 공식(Euler's identity)}}$

$$X(z) = \frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} + \frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u[n]\}$$

z-변환의 성질

- 선형성(linearity)
  - 예, $x[n] = (\cos\omega_0 n)u[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} + \frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u[n]\}$$

  - $a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC: |z| > |a|$의 알고 있는 결과를 이용하므로

$$e^{j\omega_0 n}u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n}u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}, ROC: |z| > 1$$

z-변환의 성질

- 시간 이동성(time shift)
  - 만약 $x[n]$을 k만큼 시간 이동하면 z-변환은 다음과 같음

$$x[n-k] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z)$$

  - 증명:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-(l+k)}$$

$n-k=l$로 변수 치환함

$$= z^{-k}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]z^{-l}$$

$$= z^{-k}X(z)$$

  - $z^{-k}X(z)$의 수렴 영역은 $X(z)$의 수렴 영역과 같지만, $k>0$일 경우는 $z=0$이, $k<0$일 경우는 $z=\infty$가 수렴 영역에서 제외되어야 함

z-변환의 성질

- z-영역에서의 척도 조절성(scaling property)
  - 만약 $x[n]$의 z-변환은 다음과 같으면

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC: r_1 < |z| < r_2$$

  - 임의의 상수 a에 대하여 다음과 같은 성질을 만족함

$$a^n x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(a^{-1}z), ROC: |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

  - 증명:

$$Z\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

  - 수렴 영역 $ROC: r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \Leftrightarrow |a|r_1 < |z| < |a|r_2$

z-변환의 성질

- z-영역에서의 미분
  - 만약 $x[n]$의 z-변환은 $X(z)$이면 z-영역에서의 미분은 다음과 같음

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

  - 증명:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1}Z\{nx[n]\} \Rightarrow nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

  - 수렴 영역은 변하지 않음

z-변환의 성질

- 두 신호의 컨벌루션
  - 만약 $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)$이고 $x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z)$이면

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$$

  - 이 성질을 이용하여 시스템을 더 간단하게 해석할 수 있음

입력 신호 $x[n]$
시스템의 임펄스 응답 $h[n]$

→ z-변환 →

입력 신호 $X(z)$
시스템의 임펄스 응답 $H(z)$

→

출력 신호
$Y(z) = X(z)H(z)$

→ z-역변환 →

출력 신호 $y[n]$

이산 시간 n-영역	z-영역	이산 시간 n-영역

  - 시스템의 임펄스 함수 $h[n]$의 z-변환 $H(z)$를 전달 함수(**transfer function**) 라고 함

z-변환의 성질

- 두 신호의 컨벌루션
  - 예, $x[n] = \{1, -2, 1\}, h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 5 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

$$\Big\Downarrow \; z\text{-역변환}$$

$$y[n] = \{1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

z-역변환

- 적분 기반 z-역변환의 정의

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{n-1}dz$$

  - 적분 계산이 어렵기 때문에 다음과 같은 두 가지 방법을 이용할 수 있음
    ① 멱급수 전개(**power series expansion**)
    ② 부분 분수 전개(**partial fraction expansion**)

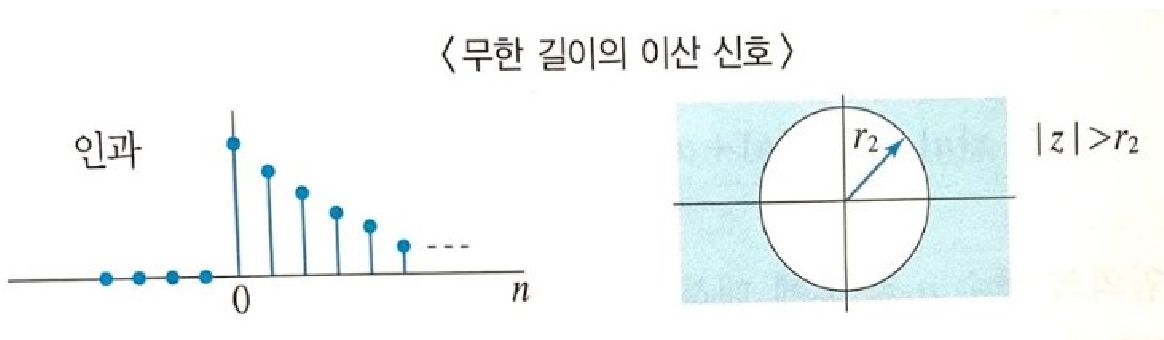
- 멱급수 전개 방법
  - $X(z)$와 수렴 영역을 함께 주어지면 다음과 같은 형태로 전개시킴

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

  - $x[n] = c_n$을 유도할 수 있음

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$
  - 만약 수렴 영역 $|z| > 1$이면 $x[n]$은 무한 길이의 인과 신호라는 것을 예상할 수 있음



→ 전개하려는 멱급수에서는 z에 대한 지수항이 음이 되도록 만들어야 함

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\dfrac{z^2}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z|>1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}+\frac{15}{8}z^{-3}+\frac{31}{16}z^{-4}+\cdots \\ \cline{2-2}
z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2} & z^2 \\
 & z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
 & \frac{3}{2}z-\frac{1}{2} \\
 & \frac{3}{2}z-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}z^{-1} \\ \cline{2-2}
 & \frac{7}{4}-\frac{3}{4}z^{-1} \\
 & \cdots
\end{array}
$$

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \cdots$$

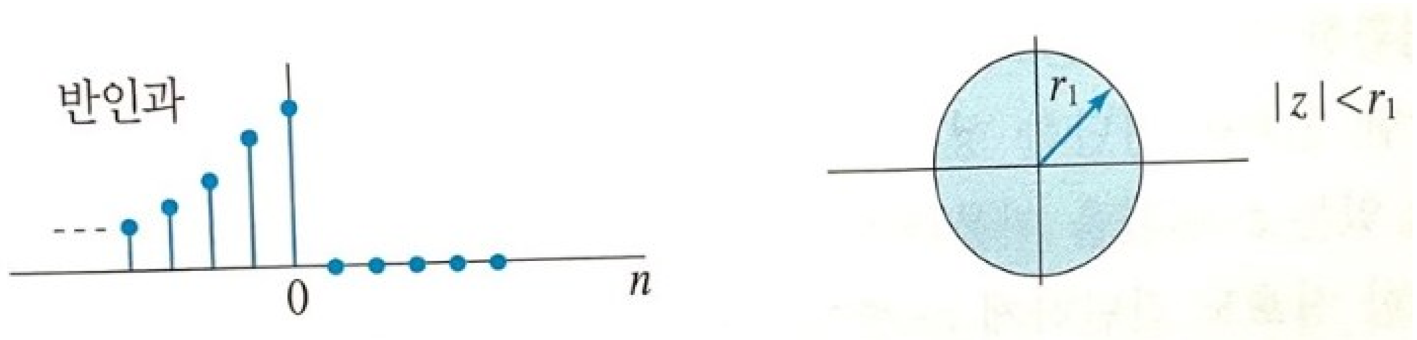
$\Big\Downarrow$ z-역변환

$$x[n] = \left\{\underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots\right\}$$

원점($n = 0$)의 위치

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$
  - 만약 수렴 영역 $|z| < 0.5$이면 $x[n]$은 무한 길이의 반인과 신호라는 것을 예상할 수 있음



→ 전개하려는 멱급수에서는 z에 대한 지수항이 양이 되도록 만들어야 함

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$, 수렴 영역 $|z| < 0.5$

$$2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots$$

$$1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \;\Big|\; 1$$

$$1 - 3z + 2z^2$$

$$3z - 2z^2$$

$$3z - 9z^2 + 6z^3$$

$$7z^2 - 21z^3 + 14z^4$$

$$\cdots$$

z-역변환

- 멱급수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \cdots$$

$\Big\Downarrow$ z-역변환

$$x[n] = \{\dots, 62,30,14,6,2,0,\underset{\uparrow}{0}\}$$

원점($n = 0$)의 위치

z-역변환

- 부분 분수 전개 방법
  - $X(z)$와 수렴 영역을 함께 주어지면 다음과 같은 형태로 전개시킴

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \cdots + a_k X_k(z)$$

  - $X_1(z), \ldots, X_k(z)$의 역변환 $x_1[n], \ldots, x_k[n]$을 찾은 다음 $x[n]$을 구할 수 있음

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \cdots + a_k x_k[n]$$

  - 이 방법은 $X(z)$가 다음과 같이 유리 함수의 형태로 주어졌을 때 유효하게 사용됨

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

z-역변환

- 부분 분수 전개 방법
  - 예, $X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1 z}{z-1} + \frac{A_2 z}{z-0.5} = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-0.5}$$

$\Downarrow$ z-역변환

$$x[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n]$$

주요 신호의 z-변환

$\boldsymbol{x[n], n \geq 0}$	$\boldsymbol{X(z)}$	수렴 영역 $\boldsymbol{\lvert z \rvert > R}$
$\delta[n]$	1	0
$\delta[n-m]$	z^{-m}	0
$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$	1
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	1
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert a \rvert$
na^n	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert a \rvert$

주요 신호의 z-변환

$\boldsymbol{x[n], n \geq 0}$	$\boldsymbol{X(z)}$	**수렴 영역** $\boldsymbol{\lvert z\rvert > R}$
$(n+1)a^n$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$	$\lvert a\rvert$
$\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)a^n}{m!}$	$\dfrac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$\lvert a\rvert$
$\cos\omega_0 n$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	1
$\sin\omega_0 n$	$\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	1
$a^n\cos\omega_0 n$	$\dfrac{z(z-a\cos\omega_0)}{z^2-2za\cos\omega_0+a^2}$	$\lvert a\rvert$
$a^n\sin\omega_0 n$	$\dfrac{za\sin\omega_0}{z^2-2za\cos\omega_0+a^2}$	$\lvert a\rvert$
$\exp[-anT]$	$\dfrac{z}{z-\exp[-aT]}$	$\lvert\exp[-aT]\rvert$

주요 신호의 z-변환

$\boldsymbol{x[n], n \geq 0}$	$\boldsymbol{X(z)}$	수렴 영역 $\boldsymbol{\lvert z\rvert > R}$
nT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	1
$nT\exp[-anT]$	$\dfrac{Tz\exp[-aT]}{(z-\exp[-aT])^2}$	$\lvert\exp[-aT]\rvert$
$\cos n\omega_0 T$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	1
$\sin n\omega_0 T$	$\dfrac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$	1
$\exp[-anT]\cos n\omega_0 T$	$\dfrac{z(z-\exp[-aT]\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\exp[-aT]\cos\omega_0 T+\exp[-2aT]}$	$\lvert\exp[-aT]\rvert$
$\exp[-anT]\sin n\omega_0 T$	$\dfrac{z(z-\exp[-aT]\sin\omega_0 T)}{z^2-2z\exp[-aT]\cos\omega_0 T+\exp[-2aT]}$	$\lvert\exp[-aT]\rvert$

단방향 z-변환

- 배운 z-변환은 모든 시간 영역($-\infty < n < \infty$)에서 정의됨

→양방향(**bilateral**) z-변환이라고 부름

- 인과 신호의 경우, $n \geq 0$ 영역에서만 존재하므로 z-변환은 다음과 같음

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

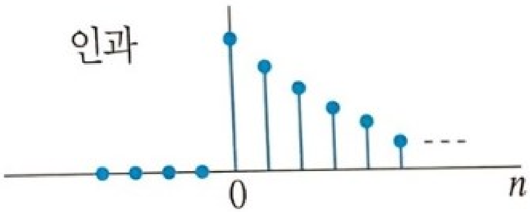
  - 위와 같은 형태를 단방향(**unilateral**) z-변환이라고 부름
  - 단방향 z-변환은 다음과 같이 표현됨

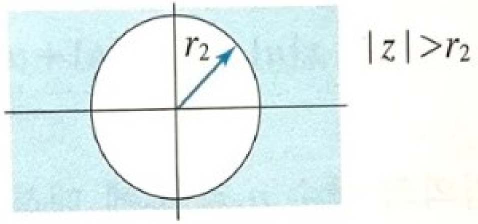
$$x[n] \overset{Z^+}{\leftrightarrow} X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

단방향 z-변환

- $x[n]$의 단방향 z-변환은 $x[n]u[n]$의 양방향 z-변환과 같음
- 단방향 z-변환의 수렴 영역은 복소평면에서 반드시 원의 외부가 되므로 단방향 z-변환을 설명할 때 수렴 영역을 특별히 언급할 필요가 없음

〈무한 길이의 이산 신호〉





- 양방향 z-변환의 성질과 단방향 z-변환의 성질은 시간 이동성을 제외하고는 거의 같음

단방향 z-변환

- 시간 이동성(shifting property)
  - 시간 지연(time delay)

만약 $x[n] \overset{z^+}{\leftrightarrow} X^+(z)$이면

$$x[n-k] \overset{z^+}{\leftrightarrow} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n]z^n\right], k > 0$$

만약 $x[n]$이 인과 신호일 경우, 즉 $x[n] = 0, n < 0$인 경우

$$x[n-k] \overset{z^+}{\leftrightarrow} z^{-k}X^+(z)$$

단방향 z-변환

- 시간 이동성(shifting property)
  - 시간 선행(time advance)

    만약 $x[n] \overset{z^+}{\leftrightarrow} X^+(z)$이면

$$x[n+k] \overset{z^+}{\leftrightarrow} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n] z^{-n} \right], k > 0$$

- 단방향 z-변환을 이용하면 차분 방정식을 쉽게 풀 수 있음

  ① 주어진 차분 방정식의 z-변환식을 구함

  ② 구하고자 하는 출력의 z-변환을 찾아냄

  ③ 시간 영역에서의 출력을 구하려면 찾아낸 z-변환을 역변환하면 됨

단방향 z-변환

- 단방향 z-변환을 이용하면 차분 방정식을 쉽게 풀 수 있음
  - 예, $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \delta[n]$, $y[-1] = 3$

    차분 방정식 양변에 단방향 z-변환을 취하면 다음과 같음

    $$Z^{+}\left\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\right\} = Z^{+}\{\delta[n]\}$$

    좌변에 단방향 z-변환의 선형성과 시간 이동성을 적용하면

    $$Y^{+}(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\{Y^{+}(z) + y[-1]z\} = 1$$

    주어진 초기 조건 $y[-1] = 3$을 삽입해서 다시 정렬하면

    $$Y^{+}(z) = \frac{5}{2}\frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

    $Y^{+}(z)$의 역변환을 취하면 $y[n] = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, n \geq 0$이 됨

LTI 시스템의 특성

- z-변환의 극점(**pole**)과 영점(**zero**)
  - 대부분의 z-변환은 유리 함수의 형태로 표현됨

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

  - 영점 : 유리 함수로 표현되는 $X(z)$에서 $X(z) = 0$이 되는 z의 모든 값
  - 극점 : 유리 함수로 표현되는 $X(z)$에서 $X(z) = \infty$이 되는 z의 모든 값
  - $X(z)$의 식에서 a_0와 b_0가 0이 아니라고 하면 다음과 같이 작성할 수 있음

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \cdots + b_M/b_0}{z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \cdots + a_N/a_0}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_N)}$$

M개의 영점

N개의 극점

$N - M$의 음수/양수에 따라
$|N - M|$개의 극점/영점 더 존재함

LTI 시스템의 특성

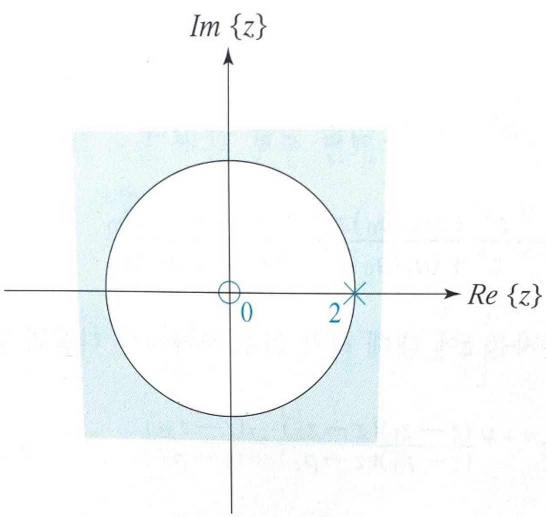
- z-변환의 극점(**pole**)과 영점(**zero**)
  - 극점과 영점은 복수평면에 그 위치(**pole-zero plot**)를 나타낼 수 있음
  - 극점은 ×를, 영점은 o를 사용해서 그 위치를 표시하게 됨
  - 예, $y[n] = 2^n u[n]$

    z-변환은 $X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}$, $ROC: |z| > 2$

    영점 $z = 0$

    극점 $z = 2$

극점에서는 $X(z) = \infty$가 되므로
수렴 영역 내에는 존재할 수 없음



LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
  - LTI 시스템의 입출력과 전달 함수와의 관계

$$Y(z) = X(z)H(z) \Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

  - LTI 시스템은 N차 상계수 차분 방정식으로 표현될 수 있음

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - 양변에 z-변환을 취하면

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(x) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

a_k와 b_k의 값에 따라 영점과 극점이 결정됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
  - 영점만 갖는 시스템

    만약 $a_k = 0, 1 \le k \le N$이면 전달 함수가 다음과 같음

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$$

$z = 0$에 존재하는 극점을 무시하면 M개의 영점만 존재하게 되므로 영점만 갖는 시스템(**all zero system**)이라고 정의함

대응하는 임펄스 응답을 구해보면 유한한 구간에서만 값을 갖게 되므로 이 시스템은 FIR(**Finite Impulse Response**) 시스템이 됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
  - 극점만 갖는 시스템

    만약 $b_k = 0,\ 1 \le k \le M$이면 전달 함수가 다음과 같음

    $$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} \qquad a_0 \equiv 0$$

    $z = 0$에 존재하는 영점을 무시하면 N개의 극점만 존재하게 되므로 극점만 갖는 시스템(**all pole system**)이라고 정의함

    극점이 존재하는 이유는 과거의 출력 신호 성분이 피드백되어 다시 입력으로 사용된 것이므로 이 시스템은 IIR(**Infinite Impulse Response**) 시스템이 됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
  - 예, 주어진 차분 방정식으로부터 시스템의 임펄스 응답을 구함

$$y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + 3x[n]$$

양변에 z-변환을 취하면

$$Y(z) = \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) + 3X(z)$$

전달 함수는 다음과 같음

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3z}{z-\frac{1}{3}}$$

영점 $z = 0$에서 영점과 $z = \frac{1}{3}$에서 극점을 갖으므로 극점만 갖는 IIR 시스템이 됨. $H(z)$의 z-역변환을 취하면

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
  - 예, 주어진 전달 함수로부터 차분 방정식을 구함

$$H(z) = \frac{5z + 2}{z^2 + 3z + 2}$$

$H(z)$을 z^{-1}의 다항식의 비로 다시 표현하면

$$H(z) = \frac{5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$의 형태와 시간 이동성을 활용하므로 차분 방정식을 구할 수 있음

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 5x[n-1] + 2x[n-2]$$